

COURS DE PHYSIQUE

DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
PAR M. JAMIN.

QUATRIÈME ÉDITION
AUGMENTÉE ET ENTIÈREMENT REFONDUE

PAR
M. BOUTY,
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

TOME TROISIÈME.

1^{re} FASCICULE.

ACOUSTIQUE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1887

(Tous droits réservés)

COURS DE PHYSIQUE.

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

ACOUSTIQUE.

INTRODUCTION.

ORIGINE ET QUALITÉS DU SON.

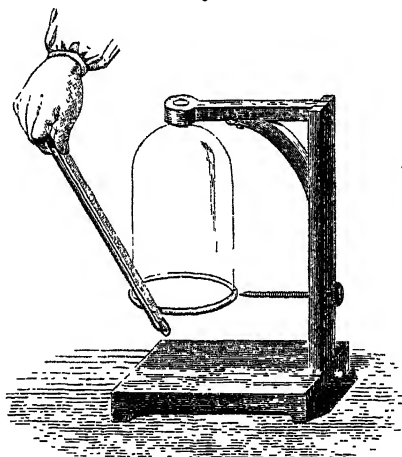
° **ORIGINE DU SON.** — On appelle *son* l'impression que perçoit l'oreille. L'*Acoustique* est la science qui s'occupe de la comparaison, de la production, de la propagation et de la perception des sons.

L'origine première de tous les sons est une série de mouvements alternatifs, mais quelconques, reproduits à des intervalles égaux et très rapprochés par l'ensemble des molécules d'un corps solide, liquide ou gazeux ⁽¹⁾. C'est ce que nous allons montrer par quelques exemples.

(1) Aristote rapportait déjà l'origine du son aux vibrations du corps sonore; mais la plupart des anciens attribuaient ces vibrations, non à l'ensemble du corps vibrant, mais à ses molécules prises individuellement, c'est-à-dire qu'ils expliquaient le son à peu près comme on explique aujourd'hui la chaleur. Parmi les modernes, Newton est le premier qui ait émis des idées saines au sujet de la production et de la propagation du son.

Une corde tendue fixée par ses deux bouts, une verge serrée dans un étau, une plaque élastique encastrée par quelques-uns de ses points, rendent des sons quand on les abandonne à elles-mêmes après les avoir écartées de leur position d'équilibre. A ce moment elles exécutent des mouvements périodiques déterminés par leur élasticité et que l'on constate, soit en observant que les contours sont devenus doubles, parce que l'œil voit à la fois les positions extrêmes qu'ils occupent, soit en remarquant que les cordes ou les verges impriment des mouvements très vifs à des chevalets de papier, les plaques à des grains de sable qu'on sème sur leur surface. Une cloche fixée, qu'on ébranle au moyen d'un archet (*fig. 1*), vient pé-

Fig. 1.



riodiquement frapper une pointe placée à une petite distance de son contour extérieur, et un timbre qui résonne (*fig. 2*) communique des soubresauts très vifs à une bille placée dans son intérieur.

Dans ces divers exemples, qu'il serait aisé, mais qu'il est inutile de multiplier, c'est l'élasticité qui détermine les mouvements périodiques des corps sonores; mais on peut aussi produire des sons par des actions mécaniques répétées à de très petits intervalles : par une carte flexible que l'on appuie

INTRODUCTION.

sur le contour d'une roue dentée en mouvement et qui s'abaisse où se relève quand une dent la rencontre ou la quitte; par un courant de gaz ou de liquide dirigé normalement contre un disque tournant percé de trous et qui passe ou est intercepté alternativement; par la rotation dans l'air d'un corps dissymétrique, etc., etc.

A la vérité, on peut développer des sons par des mouvements qui paraissent continus : c'est ce qui arrive quand un jet de gaz vient se briser contre un biseau, comme dans le sifflet ordinaire; mais, dans ce cas, le jet se partage en deux autres : l'un qui pénètre dans le sifflet, l'autre qui s'échappe dans l'atmosphère; le premier comprime tout d'abord la tranche d'air intérieur qui est voisine du biseau et qui, réagissant ensuite par son élasticité, s'oppose à une nouvelle entrée de gaz jusqu'au moment où elle a transmis sa pression aux couches qui la suivent. Il y a donc des alternatives périodiques dans le mouvement gazeux, et c'est ce qui détermine le son.

Du moment que le son est produit par les déplacements successifs des surfaces d'un corps, il est clair qu'il ne peut se transmettre à l'oreille que par un intermédiaire élastique capable de communiquer le mouvement de proche en proche. Le plus souvent cet intermédiaire est l'air. On le démontre en suspendant par un fil de soie ou de lin, dans un ballon vide (*fig. 3*), une petite clochette que l'on fait sonner en agitant l'appareil. Le son est intercepté tant que le ballon est vide, mais il est trans-

Fig. 2.

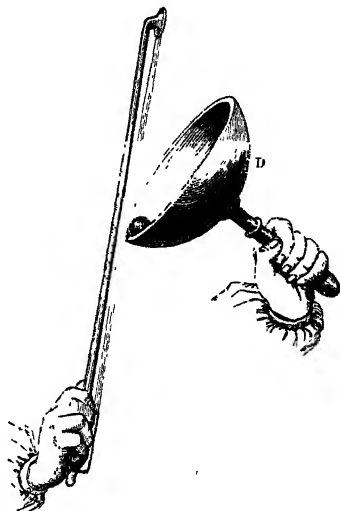
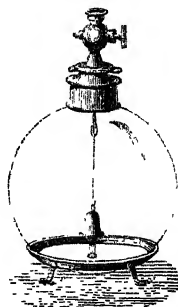


Fig. 3.



mis, et l'oreille le perçoit, si l'on rétablit la continuité entre le corps sonore et cet organe, soit en laissant rentrer l'air, soit en remplissant le ballon avec un liquide, soit en soutenant la clochette par un fil élastique continu.

On voit donc que les solides, les liquides et les gaz ont la propriété de transmettre le son, et l'on s'en rend compte en remarquant que chaque mouvement du corps sonore détermine dans le milieu ambiant des condensations suivies de dilatations qui se propagent en se poursuivant. Nous nommerons *demi-vibration* tout mouvement propulsif ou appulsif qui comprime ou dilate l'air, et *vibration complète*, ou simplement *vibration*, l'ensemble de l'aller et du retour du corps sonore qui détermine une condensation et la dilatation qui la suit.

QUALITÉS DU SON. — Les impressions perçues par l'oreille varient à l'infini.

1° Il y en a qui sont brusques, pour ainsi dire instantanées, et que l'on nomme *bruits*; d'autres sont prolongées et mélodieuses : ce sont les *sons musicaux*. Mais on peut toujours considérer les bruits, soit comme des notes musicales de très courte durée, soit comme des mélanges de notes discordantes. Parmi diverses expériences qu'on peut faire à ce sujet, nous choisirons la suivante, qui est très saisissante. On prend sept lames de bois dur, de même épaisseur et de même largeur, mais dont les longueurs décroissent de l'une à l'autre suivant une loi que nous étudierons bientôt. Quand on laisse tomber l'une d'elles sur le sol, elle donne un bruit qui paraît n'avoir aucun caractère musical; mais, lorsqu'on les jette l'une après l'autre suivant l'ordre de leurs grandeurs décroissantes, on obtient les notes de la gamme naturelle. On raconte que Pythagore avait observé par hasard quatre enclumes de grandeurs déterminées et différentes qui donnaient l'accord parfait quand on les frappait avec un marteau.

2° A mesure que l'on s'approche ou que l'on s'éloigne d'un corps vibrant, le son que l'on perçoit devient plus ou moins fort; on dit qu'il a une *intensité* plus ou moins grande. Cette intensité est proportionnelle à la force vive des mouvements

communiqués à l'oreille, pour des notes qui sont à l'unisson; mais, à force vive égale, la sensibilité de l'oreille change avec la hauteur des sons.

3° On ne confond point les sons donnés par divers instruments de musique, lors même qu'ils sont à l'unisson. Ils se distinguent encore par une qualité originelle qui se nomme le *timbre*, qualité que l'oreille apprécie nettement. Le timbre dépend de la forme des vibrations, ou, ce qui revient au même, de la superposition de plusieurs mouvements vibratoires de périodicité différente, dont le résultat est un mouvement périodique complexe, ainsi que nous l'expliquerons dans la suite.

4° La qualité la plus importante des sons est leur *hauteur musicale*. Or, toutes les expériences ayant montré qu'une note est d'autant plus élevée qu'elle résulte de vibrations plus rapides, nous sommes conduits, pour apprécier la hauteur des sons, à mesurer le nombre de vibrations qu'un corps sonore donné effectue pendant l'unité de temps. Ce sera le premier objet de notre étude.

CHAPITRE PREMIER.

DE L'ÉVALUATION NUMÉRIQUE DES SONS.

Mesure du nombre des vibrations. — Sirène. — Sirène de Seebeck. — Roue dentée. — Méthode graphique. — Accords musicaux. — Accords simples. — Accords multiples. — Gamme harmonique ou naturelle. — Dièses et bémols. — Gamme mélodique. — Tempérament. — Logarithmes acoustiques. — Diapason. — Limite des sons perceptibles.

MESURE DU NOMBRE DES VIBRATIONS.

SIRÈNE. — La mesure du nombre de vibrations qui produisent un son peut être obtenue d'une manière directe, à l'aide de divers instruments sonores construits spécialement pour cet objet.

La sirène, imaginée par Cagniard de la Tour ⁽¹⁾, est représentée dans les *fig. 4, 5, 6*. Un tambour cylindrique *DEB'*, dans lequel on insuffle de l'air par un tuyau *D*, est terminé par un disque supérieur plan *BB'*, percé sur sa circonférence d'un certain nombre de trous équidistants. Supposons qu'il y en ait 8. Un deuxième disque métallique *CC'*, placé au-dessus et très près du premier, tourne autour d'un axe vertical; il est lui-même percé de 8 trous qui peuvent se placer en coïncidence ou en opposition avec ceux du disque fixe, et par conséquent laisser passer ou arrêter le courant d'air.

Le plateau supérieur tourne rapidement, il ouvre et ferme alternativement 8 fois les conduits pendant un tour, et il y a 8 impulsions imprimées à l'air extérieur, séparées par 8 intervalles de repos; par conséquent, il y a 8 vibrations complètes.

⁽¹⁾ CAGNIARD DE LA TOUR, *Annales de Chimie et de Physique*, 2^e série, t. XII, p. 167; t. XVIII, p. 438, et t. XXXV, p. 42 (1819-1825).

Afin de pouvoir faire tourner le plateau mobile par les impulsions du courant d'air lui-même, les orifices fixes et mobiles sont percés obliquement (*fig. 5*), les premiers *b* de la gauche vers la droite, les seconds *c* de la droite vers la gauche. De cette façon, le courant, obligé de changer sa direction brusquement, imprime de *V'* à *X'* une impulsion tangentielle au plateau supérieur, qui prend une vitesse d'autant plus grande que la pression de l'air est plus forte dans le tambour.

Fig. 4.

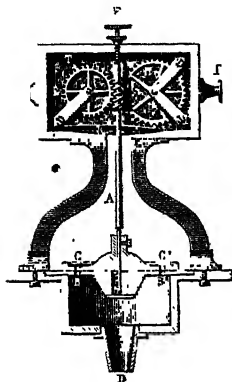


Fig. 5.

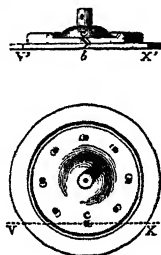
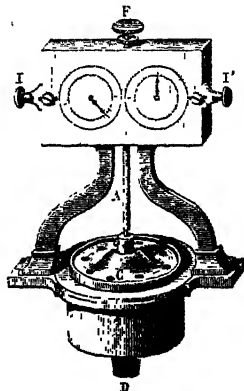


Fig. 6.



Si l'on fait communiquer le tube D avec une soufflerie par l'intermédiaire d'un robinet, l'appareil se met à tourner avec une vitesse croissante et produit un son qui, d'abord très grave, s'élève peu à peu jusqu'à cesser d'être perceptible quand les vibrations deviennent trop rapides. En réglant le robinet, on peut maintenir ce son à une hauteur constante, et, comme il y a 8 vibrations par tour, il suffit de mesurer le nombre de tours effectués pendant une seconde pour pouvoir calculer le nombre de vibrations exécutées pendant ce temps.

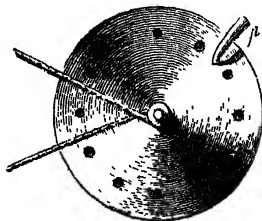
A cet effet, l'axe AF porte à sa partie supérieure une vis sans fin; elle engrène avec une roue dentée E (*fig. 4*) qu'elle fait marcher d'une dent par tour, et dont les mouvements sont accusés par une aiguille mobile sur un cadran extérieur (*fig. 6*). Soit 100 le nombre total des dents de la roue et des divisions du cadran; chaque division correspond à 8 et chaque tour du

cadran à 800 vibrations. Après que la roue E a fait un tour complet, un bras T vient rencontrer une deuxième roue dentée H et fait marcher d'une division l'aiguille qui lui correspond. Par conséquent, si pendant un temps T la deuxième aiguille a marché de n et la première de n' divisions, le nombre des vibrations est égal à $n \times 800 + n' \times 8$.

Enfin tout le système du compteur est porté sur une plaque qu'on peut déplacer d'une petite quantité, soit de I' vers I, ce qui fait engrener la roue E avec l'axe, soit de I vers I', ce qui la rend indépendante de la vis sans fin. Dès lors, pour faire une mesure, on commence par élever le son jusqu'à la hauteur voulue, en réglant le robinet et, aussitôt qu'on y est parvenu, on engrène la sirène et l'on met en marche les aiguilles d'un compteur à secondes; puis, après un temps suffisamment long, on désengrène et l'on arrête le compteur. Cela donne à la fois le nombre des vibrations et le temps.

SIRÈNE DE SEEBECK (1). — Il est souvent plus avantageux (fig. 7) de faire mouvoir directement par une courroie le plateau percé de trous et de diriger vers ceux-ci l'air sorti d'un tube p. C'est là le principe de la sirène de Seebeck. Dans celle qui

Fig. 7.



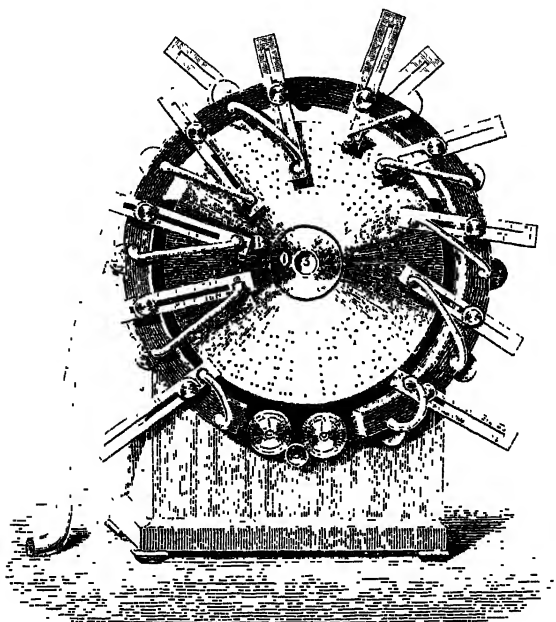
est représentée (fig. 8), un mouvement d'horlogerie fait tourner rapidement un axe horizontal O sur lequel on peut fixer différents disques en carton ou en cuivre, portant chacun plusieurs séries de trous disposés sur des cercles concentriques, et contre lesquels on dirige des courants d'air par des porte-vent A, B, C, ... ; un comp-

teur mécanique indique le nombre de tours accomplis pendant une seconde. Pour avoir un son plus intense, on peut aussi, comme dans la sirène de Cagniard de la Tour, faire parler à la fois tous les orifices d'un même cercle; il faut pour cela appliquer contre le disque mobile un plateau fixe, percé de trous qui

(1) SEEBECK (A.), *Annales de Poggendorff*, t. LX, p. 449; 1837.

sont disposés en séries annulaires et communiquent avec des tambours concentriques dans lesquels on dirige le vent par

Fig. 8.

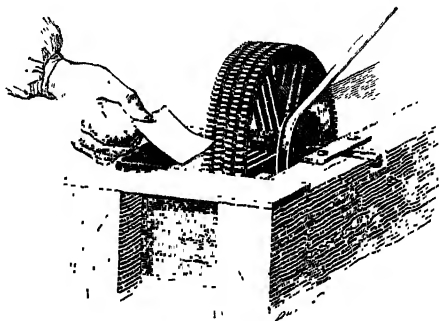


des robinets. Nous reviendrons plus loin sur cet appareil, qui donne lieu à des expériences très diverses.

ROUE DENTÉE. — Savart a essayé de remplacer la sirène par une roue dentée qu'il mettait en mouvement avec une courroie enroulée sur un grand volant à manivelle (*fig. 9 et 12*). Une carte appuyée sur le contour de la roue produisait autant de vibrations par tour qu'il y avait de dents, et le nombre des tours était mesuré par un compteur identique à celui de la sirène; mais la masse énorme des supports, la difficulté d'obtenir un mouvement régulier et la mauvaise qualité des sons que l'on obtient rendent cet appareil coûteux, incommode et peu propre à l'emploi qu'on en voulait faire.

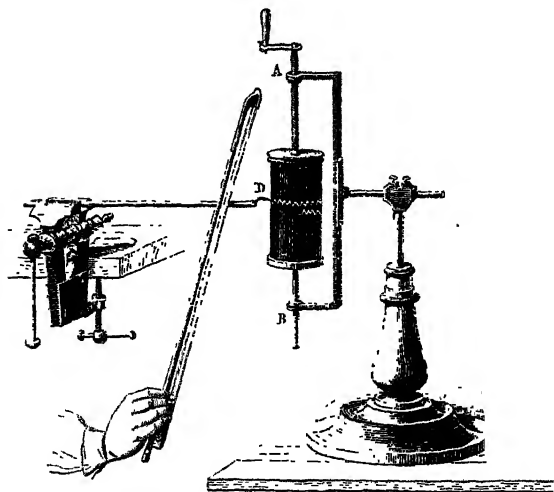
MÉTHODE GRAPHIQUE. — On doit enfin à Duhamel ⁽¹⁾ une méthode générale beaucoup plus simple, qui consiste à faire

Fig. 9.



tracer par le corps sonore lui-même les vibrations qu'il exerce

Fig. 10.



cute (fig. 10). A cet effet, il est muni d'une sorte de plume, c'est-à-dire d'un petit fil métallique D collé sur sa surface et

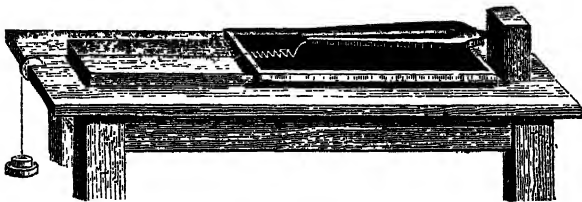
(1) DUHAMEL, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. III, p. 646, et t. IX, p. 567; 1836, 1830.

dont la pointe appuie sur un cylindre en verre couvert de noir de fumée et porté sur une vis sans fin AB. Quand le corps ne vibre pas et qu'on fait tourner le cylindre, la pointe enlève le noir et décrit une hélice régulière et très fine; quand il vibre, au contraire, l'hélice est tremblée, et, chaque sinuosité correspondant à une oscillation, leur nombre est égal à celui des vibrations qui ont été produites pendant le temps de l'expérience.

Il ne faut pas chercher à entretenir les vibrations avec un archet, parce que chaque coup successif de cet instrument détermine une perturbation vibratoire qui trouble la continuité de la courbe sinueuse; il faut laisser les vibrations se continuer d'elles-mêmes par l'effet de l'élasticité jusqu'au moment où elles cessent d'être perceptibles; et, comme elles s'éteignent rapidement, l'expérience ne peut pas toujours être prolongée pendant un temps suffisant. On remédie à cet inconvénient en cherchant, non pas le nombre de vibrations exécutées par le corps sonore pendant un temps mesuré, mais le rapport des nombres de vibrations données pendant le même temps par ce corps sonore et un diapason connu. On dispose ces deux appareils l'un au-dessus de l'autre en face du même cylindre; chacun trace sa courbe, et l'on compte ensuite les sinuosités comprises entre deux génératrices du cylindre. S'il y en a n et n' pour les deux courbes, le rapport cherché est égal à $\frac{n}{n'}$, et si, par exemple, le diapason fait 435 vibrations par seconde, le corps sonore considéré en fera $\frac{n}{n'} \times 435$.

On peut remplacer le cylindre par un appareil plus simple

Fig. 11.



(fig. 11), composé d'une planche qu'on peut faire glisser le long d'une coulisse au moyen d'un poids, et sur laquelle est

fixé un verre couvert de noir de fumée. Au-dessus se trouvent fixés le diapason et le corps sonore qu'on veut étudier. Tous deux portent une pointe fine appuyée sur le verre et qui trace les vibrations de l'un et de l'autre corps quand on fait glisser la planche.

ACCORDS MUSICAUX.

Maintenant que nous savons mesurer le nombre des vibrations effectuées par un corps sonore pendant un temps donné, nous allons chercher la relation qui existe entre la fréquence de ces vibrations et la hauteur des notes perçues par l'oreille.

ACCORDS SIMPLES. — L'oreille nous apprend tout d'abord que des sons donnés par des instruments différents peuvent avoir une hauteur égale, quel que soit leur timbre. On dit qu'ils sont *à l'unisson*. Prenons par exemple la note du diapason ordinaire; on pourra la produire avec la sirène et avec une roue dentée en leur donnant des vitesses déterminées, avec des cordes, des verges et des plaques élastiques, en les prenant de dimensions convenables, et il sera possible de mesurer, soit par des compteurs, soit par le procédé graphique, les nombres de vibrations effectuées pendant une seconde par tous ces appareils produisant des notes à l'unisson. Or, en faisant cette expérience, on trouve que ces nombres sont tous égaux et l'on en conclut cette loi fondamentale de l'Acoustique :

I. Tous les sons de même hauteur, quel que soit le corps sonore qui les donne, correspondent à des nombres de vibrations égaux, et réciproquement.

Il suit de là qu'une note donnée est définie par le nombre n de vibrations qui lui correspondent et peut être désignée par ce nombre n .

Lorsque l'on produit à la fois deux sons différents en hauteur, il arrive que cette superposition nous impressionne agréablement ou péniblement. Dans le premier cas, les deux sons forment un *accord consonant* ou une *consonance*; dans le second, une *dissonance*.

Il existe un nombre considérable d'accords différents les uns

des autres; l'oreille a la faculté de les distinguer, de les comparer et de les classer. La Musique n'a pu que les consacrer en les nommant, puisqu'ils répondent à une loi physiologique qu'elle ne pouvait enfreindre; mais l'Acoustique a dû rechercher quelles relations doivent exister entre les nombres de vibrations des deux notes pour qu'elles produisent tel ou tel accord. Nous allons exposer les résultats des expériences qui ont été faites sur ce sujet.

Prenons comme exemple deux notes formant un accord bien connu et bien facile à apprécier, celui du *sol* à l'*ut* de la gamme naturelle; l'oreille nous apprend, en premier lieu, que cet accord peut exister avec le même caractère relatif entre deux notes ou très graves ou très hautes, et qu'il est conséquemment indépendant du nombre absolu de vibrations. Secondement, les mesures montrent que les nombres de vibrations sont en rapport constant et égal à $\frac{3}{2}$ toutes les fois que cet accord est réalisé et, réciproquement, que le même accord est constaté par l'oreille toutes les fois que ce rapport est égal à $\frac{3}{2}$. En généralisant cet exemple, on peut énoncer cette deuxième loi, tout aussi importante que la précédente :

II. *Tout accord musical entre deux notes est défini et peut être exprimé par le rapport $\frac{n}{n'}$ de deux nombres entiers de vibrations.*

Il nous reste à chercher quelles sont les valeurs du rapport $\frac{n}{n'}$ qui correspondent aux accords consonnants. Pour cela, nous allons étudier les intervalles musicaux que l'expérience a fait reconnaître comme étant les plus agréables à l'oreille, c'est-à-dire l'octave, la quinte, la quarte et les tierces majeure ou mineure. Or on a trouvé :

	$\frac{n}{n'}$
Octave.....	$\frac{2}{1}$
Quinte.....	$\frac{3}{2}$

	$\frac{n}{n'}$
Quarte.....	$\frac{4}{3}$
Tierce majeure.....	$\frac{5}{4}$
Tierce mineure.....	$\frac{6}{5}$

A ces intervalles, il faut aussi ajouter la sixte majeure $\frac{5}{3}$ et la sixte mineure $\frac{8}{5}$, qui sont encore consonants, mais qui le sont déjà moins.

En généralisant ces résultats, on arrive à cette troisième loi :

III. *Si l'on superpose deux notes exprimées par deux termes de la série naturelle des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... on formera un accord d'autant plus consonant que le rapport de ces nombres est plus simple, et une dissonance d'autant plus désagréable qu'il sera plus complexe.*

Les notes 1, 2, 3, 4, ..., considérées relativement, se nomment en Musique la *série des notes harmoniques*. Non seulement elles donnent en général des accords consonants, mais elles sont produites à la fois par la plupart des corps sonores et se distinguent nettement quand on fait résonner des cordes, des tuyaux d'orgue, etc.

ACCORDS MULTIPLES. — Il est maintenant facile de prévoir que trois, quatre, ... notes, dont les nombres de vibrations sont en rapport simple, et qui, prises deux à deux, produiraient une sensation harmonieuse, devront donner un accord multiple consonant si on les superpose. C'est en effet ce qui arrive. Parmi les exemples que l'on pourrait citer, les plus remarquables sont fournis par les sons 4, 5, 6 et par les sons 10, 12, 15 ou $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$. Les trois premiers donnent, quand on les

compare deux à deux, les rapports $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{3}{2}$ et constituent, par l'assemblage de ces trois intervalles consonants, ce que l'on nomme l'*accord parfait majeur*. Les trois autres notes 10, 12,

15, qui présentent les rapports $\frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$, lesquelles ne diffèrent des précédents que par l'ordre des deux premiers intervalles, forment l'*accord parfait mineur*. La dénomination de ces accords triples montre assez combien leur effet est agréable à l'oreille.

GAMME HARMONIQUE. — Nous connaissons maintenant la condition à laquelle deux ou plusieurs sons doivent satisfaire pour que leur superposition produise des accords. Il est clair que la Musique, obligée de soumettre ses combinaisons à ces lois harmoniques sous peine de manquer son but, a dû adopter une échelle de sons qui permette de réaliser tous les intervalles consonants. Cette échelle se nomme la *gamme*; elle est composée de sept notes, dont voici les noms et les nombres de vibrations comparés à ceux de la première :

ut, ré, mi, fa, sol, la, si, ut₂,

1, $\frac{9}{8}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{15}{8}$ 2.

24 27 30 32 36 40 45 48.

Cette gamme se continue par une seconde, une troisième, ..., commençant toutes par l'*ut* qui finit la précédente. Chacune se compose des mêmes séries de notes échelonnées dans le même rapport, et que l'on distingue par un indice qui marque le rang de la gamme. Ainsi l'on écrit *ut₂, ré₂, ...* pour la seconde; *ut₃, ré₃, ...* pour la troisième, etc. De même on prolonge la série des notes en sens inverse par d'autres gammes descendantes affectées de l'indice 0, puis d'indices négatifs qui expriment leur rang de précession.

Quelle que soit son origine, nous accepterons la gamme comme un fait accompli, et nous allons montrer qu'en combinant deux à deux les sons qui la composent on peut réaliser tous les rapports harmoniques qui sont agréables à l'oreille. Ce sera justifier la gamme *a posteriori*. Le Tableau suivant contient les rapports des nombres de vibrations de deux notes quelconques de cette gamme.

Valeur des intervalles musicaux

SECONDES.	TERTIÈRES.	QUARTES.	QUINTES.	SIXTES.	SEPTIÈMES.
$\text{ré } \frac{9}{8}$ $\frac{\text{ut}}{\text{ut}}$	$\frac{\text{mi } 5}{\text{ut } 4}$	$\frac{\text{fa } 4}{\text{ut } 3}$	$\frac{\text{sol } 3}{\text{ut } 2}$	$\frac{\text{la } 5}{\text{ut } 3}$	$\frac{\text{si } 15}{\text{ut } 8}$
$\frac{\text{mi } 10}{\text{ré } 9} = \frac{9}{8} \frac{80}{81}$	$\frac{\text{ré } 6}{\text{fa } 5} \frac{80}{81} = \frac{5}{4} \frac{80}{81} \frac{24}{25}$	$\frac{\text{sol } 4}{\text{ré } 3}$	$\frac{\text{la } 3}{\text{ré } 2} \frac{80}{81}$	$\frac{\text{si } 5}{\text{ré } 3}$	$\frac{\text{ut}_2}{\text{ré}} \frac{9}{5} \frac{80}{81} = \frac{15}{8} \frac{80}{81} \frac{24}{25}$
$\frac{\text{fa } 16}{\text{mi } 15} = \frac{9}{8} \frac{80}{81} \frac{24}{25}$	$\frac{\text{sol } 6}{\text{mi } 5} = \frac{5}{4} \frac{24}{25}$	$\frac{\text{la } 4}{\text{mi } 3}$	$\frac{\text{si } 3}{\text{mi } 2}$	$\frac{\text{ut}_2}{\text{mi}} \frac{8}{5} = \frac{5}{3} \frac{24}{25}$	$\frac{\text{ré}_2}{\text{mi}} \frac{9}{5} = \frac{15}{8} \frac{24}{25}$
$\frac{\text{sol } 9}{\text{fa } 8}$	$\frac{\text{la } 5}{\text{fa } 4}$	$\frac{\text{si } 4}{\text{fa } 3} \frac{25}{24} \frac{81}{80}$	$\frac{\text{ut}_2}{\text{fa}} \frac{3}{2}$	$\frac{\text{ré}_2}{\text{fa}} \frac{5}{3}$	$\frac{\text{mi}_2}{\text{fa}} \frac{15}{8}$
$\frac{\text{la } 10}{\text{sol } 9} = \frac{9}{8} \frac{80}{81}$	$\frac{\text{si } 5}{\text{sol } 4}$	$\frac{\text{ut}_2}{\text{si}} \frac{4}{3}$	$\frac{\text{ré}_2}{\text{sol}} \frac{3}{2}$	$\frac{\text{mi}_2}{\text{sol}} \frac{5}{3}$	$\frac{\text{fa}_2}{\text{sol}} \frac{9}{5} \frac{80}{81} = \frac{15}{8} \frac{80}{81} \frac{24}{25}$
$\frac{\text{si } 9}{\text{la } 8}$	$\frac{\text{ut}_2}{\text{la}} \frac{6}{5} = \frac{5}{4} \frac{24}{25}$	$\frac{\text{ré}_2}{\text{la}} \frac{4}{3} \frac{80}{81}$	$\frac{\text{mi}_2}{\text{la}} \frac{3}{2}$	$\frac{\text{fa}_2}{\text{la}} \frac{8}{5} = \frac{5}{3} \frac{24}{25}$	$\frac{\text{sol}_2}{\text{la}} \frac{9}{5} = \frac{15}{8} \frac{24}{25}$
$\frac{\text{ut}_2}{\text{si}} \frac{16}{15} = \frac{9}{8} \frac{80}{81} \frac{24}{25}$	$\frac{\text{ré}_2}{\text{si}} \frac{6}{5} = \frac{5}{4} \frac{24}{25}$	$\frac{\text{mi}_2}{\text{si}} \frac{4}{3}$	$\frac{\text{fa}_2}{\text{si}} \frac{3}{2} \frac{24}{81}$	$\frac{\text{sol}_2}{\text{si}} \frac{8}{5} = \frac{5}{3} \frac{24}{25}$	$\frac{\text{la}_2}{\text{si}} \frac{9}{5} \frac{80}{81}$

Voici les remarques que l'on peut faire sur ces résultats.

Les intervalles de *seconde*, c'est-à-dire d'une note à la précédente, ont trois valeurs différentes : la première $\frac{9}{8}$ se nomme *ton majeur*; la seconde $\frac{10}{9} = \frac{9}{8} \frac{80}{81}$ est le *ton mineur*, qui diffère du précédent d'une quantité si petite, $\frac{80}{81}$, que l'oreille ne l'apprécie presque pas : on la considère comme négligeable et on l'appelle *comma*. La troisième $\frac{16}{15}$, qui est égale à $\frac{10}{9}$ multiplié par $\frac{24}{25}$ est ce qu'on nomme le *demi-ton majeur*, et, comme $\frac{16}{15} \times \frac{24}{25} = \frac{10}{9}$, cela veut dire qu'un ton $\frac{10}{9}$ peut se partager en deux intervalles, l'un $\frac{16}{15}$, qui est le *demi-ton majeur*, l'autre $\frac{25}{24}$, un peu plus petit et qui est le *demi-ton mineur* : c'est le plus petit des intervalles que l'on considère en Musique. Les tons et demi-tons sont des intervalles dissonants.

On voit par la colonne des secondes que la gamme est la succession de 2 tons, d'un demi-ton, de 3 tons et d'un demi-ton.

Les *tierces* sont de deux sortes : les unes, égales à $\frac{5}{4}$, sont majeures; les autres, $\frac{6}{5} = \frac{5}{4} \frac{24}{25}$, sont mineures; celles-ci sont égales à celles-là multipliées par $\frac{24}{25}$ ou affaiblies d'un demi-ton mineur. Une seule tierce mineure, $\frac{fa}{re}$, est affaiblie d'un comma qu'on néglige.

Toutes les *quartes* sont (à un comma près) égales à $\frac{4}{3}$, excepté $\frac{si}{fa}$, qui est augmenté d'un demi-ton mineur $\frac{25}{24}$, et qui est une dissonance.

A une seule près, $\frac{fa_2}{si}$, qui est mineure, toutes les *quintes*

sont égales à $\frac{3}{2}$ (à un comma près). De même les *sixtes* et les *septièmes* sont majeures et égales à $\frac{5}{3}$ et à $\frac{15}{8}$, ou mineures, c'est-à-dire diminuées d'un demi-ton $\frac{25}{24}$.

Enfin les *octaves* sont toutes égales entre elles et à 2.

On voit en résumé que, prises deux à deux, les notes de la gamme offrent les rapports de vibration suivants :

$$\frac{2}{1}, \frac{15}{8}, \frac{9}{5}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{16}{15}, \frac{25}{24};$$

elles permettent de réaliser toutes les combinaisons en rapport simple et que l'on peut former avec les harmoniques

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, -, 8, 9, 10, -, 12, -, 15, 16, -, 18, \\ -, 20, -, 24, 25;$$

la gamme est donc très heureusement combinée pour reproduire tous les intervalles consonnants.

DIÈSES ET BÉMOLS. — On a imaginé d'augmenter encore les ressources de la Musique en surélevant ou en abaissant momentanément d'un demi-ton mineur toutes les notes de la gamme, c'est-à-dire en les multipliant par $\frac{25}{24}$ ou par $\frac{24}{25}$: C'est ce qu'on appelle les *diéser* ou les *bémoliser*; nous allons voir les avantages qui résultent de cette opération.

Si l'on considère un accord formé par deux notes et si l'on dièse la plus grave ou qu'on bémolise la plus aiguë, leur intervalle est diminué d'un demi-ton mineur, et le rapport de leurs nombres de vibrations est multiplié par $\frac{24}{25}$. Alors :

1° Les tierces, quarts, sixtes et septièmes majeures deviennent mineures;

2° Un ton majeur $\frac{9}{8}$ se réduit à $\frac{9}{8} \frac{24}{25} = \frac{27}{25} = \frac{16}{15} \times \frac{81}{80}$, et un ton mineur $\frac{10}{9}$ à $\frac{10}{9} \times \frac{24}{25} = \frac{16}{15}$; tous deux deviennent, à un comma près, égaux à un demi-ton majeur.

Quand, au contraire, on bémolise la note grave ou qu'on dièse la note aiguë d'un accord quelconque, on élève l'intervalle d'un demi-ton, et, s'il était mineur, il devient majeur.

La Musique acquiert par cette opération la faculté, dont elle fait un fréquent usage, de transposer un air, c'est-à-dire de le reproduire avec les mêmes intervalles, mais en élevant ou en abaissant toutes les notes de la même quantité. Supposons, par exemple, qu'on veuille les élever de deux tons; alors il faudra commencer par remplacer les notes

ut, ré, mi, fa, sol, la, si, ut₂

par les suivantes, qui sont élevées de deux rangs :

mi, fa, sol, la, si, ut₂, ré₂, mi₂;

mais cette nouvelle gamme se composerait d'un demi-ton, de trois tons, d'un demi-ton et de deux tons; elle n'aurait donc pas les mêmes intervalles successifs que la gamme d'*ut*, et l'air serait changé. Il faut par conséquent, non seulement reculer les notes de deux rangs, comme nous venons de le faire, mais encore altérer leurs valeurs et écrire

mi, fa, sol*, la, si, ut₂*, ré₂*, mi₂.*

Après ces modifications, les intervalles des notes seront devenus à peu près les mêmes que dans la gamme naturelle. Il n'y aura que cette différence, que la gamme commencera par un ton mineur suivi d'un ton majeur, tandis que le contraire a lieu dans la gamme d'*ut*.

Enfin, c'est encore au moyen des dièses et des bémols qu'on peut passer du *mode majeur*, qui est celui de la gamme naturelle, au *mode mineur* constitué par une gamme différente qui se compose de : un ton, un demi-ton, deux tons, un demi-ton et deux tons, et qui peut se représenter par la série des rapports

<i>la,</i>	<i>si,</i>	<i>ut₂,</i>	<i>ré₂,</i>	<i>mi₂,</i>	<i>fa₂,</i>	<i>sol₂,</i>	<i>la₂</i>
1.	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{27}{20} = \frac{4}{3} \frac{81}{80}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	2
	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$

Nous n'entrerons pas dans plus de détails sur ce sujet, qui appartient spécialement à la Musique (1).

GAMME MÉLODIQUE. — Le système musical que nous venons d'exposer est d'origine moderne; il se trouve indiqué pour la première fois dans un livre publié au xvi^e siècle par un Italien, nommé Zarlino (2). Auparavant, on admettait, d'après les pythagoriciens, des valeurs des intervalles exprimables au moyen des deux facteurs premiers 2 et 3. L'octave et la quinte sont représentées rigoureusement par le même nombre dans le système de Pythagore et dans celui de Zarlin; mais la tierce majeure a, dans le système de Pythagore, la valeur $\frac{3^4}{2^7}$ ou très approximativement $\frac{5}{4} \frac{81}{80}$; elle est donc plus grande d'un comma que la tierce majeure de Zarlin. Il en résulte pour les intervalles de tierce mineure, de sixte et de septième des différences correspondantes, comme on le voit par le Tableau suivant :

(1) En Allemagne, la notation employée usuellement consiste dans l'emploi des premières lettres de l'alphabet :

<i>ut</i>	<i>ré</i>	<i>mi</i>	<i>fa</i>	<i>sol</i>	<i>la</i>	<i>si</i>
<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>a</i>	<i>h</i>

Les diverses gammes se distinguent par de grandes ou de petites lettres et des indices.

Le *la* normal (*la*₂) est habituellement représenté par *a*₁; de là la correspondance suivante :

Notation { allemande...	<i>C</i> ₁	<i>C</i>	<i>c</i>	<i>c</i> ₁	<i>c</i> ₂	<i>c</i> ₃ , ...
{ française...	<i>ut</i> ₀	<i>ut</i> ₁	<i>ut</i> ₂	<i>ut</i> ₃	<i>ut</i> ₄	<i>ut</i> ₅ , ...
Nombre de vibrations.	32,625	65,25	130,5	261	522	1044, ...

Quelquefois les indices sont remplacés par des accents. La notation allemande est employée en Angleterre, mais la lettre *h* est remplacée par *b*.

On indique les dièses en ajoutant *is*, les bémols en ajoutant *es*; par exemple, *cis* représente *ut*♯, *ges* représente *sol*♭; ces dernières conventions ne sont pas adoptées en Angleterre.

(2) ZARLINO, *Istituzioni armoniche*, Venezia, 1558.

	OCTAVE	QUINTE.	QUARTE.	TIERCE		SIXTE.	SEPTIÈME	ONZIÈME
				majeure	mineure			
Pythagore...	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3^2}{2^2}$	$\frac{2^3}{3^2}$	$\frac{3^3}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^2}$	1
Zarlin	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	1

MM. Mercadier et Cornu ⁽¹⁾ ont fait des expériences nombreuses et variées pour reconnaître si l'un des deux systèmes est absolument conforme à l'usage des musiciens exercés; par exemple, ils ont enregistré directement les vibrations de la caisse du violon ou du violoncelle à l'aide d'un fil métallique muni, à l'une de ses extrémités, d'un style inscripteur, et dont l'autre extrémité était soudée à une plaque de laiton de 7^{cm} à 8^{cm} de long sur 2^{cm} ou 3^{cm} de large, placée entre les pieds du chevalet de l'instrument. Ils ont reconnu ainsi que les artistes ne donnent pas exactement la même valeur aux intervalles, suivant qu'ils jouent une mélodie, c'est-à-dire qu'ils produisent successivement des notes isolées ou qu'ils jouent un morceau d'harmonie dans lequel ces notes se trouvent données simultanément ⁽²⁾. Dans ce dernier cas, ils se servent des intervalles de Zarlin; mais, dans le premier, ils emploient ceux de Pythagore. On en jugera par le Tableau suivant; les intervalles sont donnés sous la forme de fractions décimales.

(1) MERCADIER et CORNU, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, LXVIII, p. 301 et 424; LXX, p. 1168; LXXIII, p. 178; LXXIV, p. 321; et LXXXVI, p. 431; 1869-1873. Voir aussi GUÉROULT, *Comptes rendus*, LXX, p. 1037; 1870. et BIDAULT, *Comptes rendus*, LXXX, p. 1599; 1875.

(2) On verra plus tard que, dans ce dernier cas, les sons principaux sont accompagnés de sons résultants, qui doivent être d'accord avec les premiers pour que l'effet produit sur l'oreille soit agréable. C'est ce qui arrive avec les intervalles de la gamme harmonique, bien que ces derniers, quand ils sont produits successivement, soient moins agréables que ceux de la gamme mélodique. La tierce mélodique donnerait un son résultant accompagné de battements.

Gamme majeure.

	<i>ut.</i>	<i>ré.</i>	<i>mi.</i>	<i>fa.</i>	<i>sol.</i>	<i>la.</i>	<i>si</i>	<i>ut₂.</i>
Moyenne des expériences (mélodie)	1	1,127	1,365	1,329	1,500	1,686	1,917	"
Intervalle pythagoricien.	1	1,125	1,266	1,333	1,500	1,687	1,898	2,000
Intervalle de Zarlin . .	1	1,125	1,250	1,333	1,500	1,666	1,875	2,000
Valeur du comma	"	0,014	0,016	0,017	0,019	0,021	0,024	0,025

Gamme mineure.

	<i>la.</i>	<i>si.</i>	<i>ut</i>		<i>ré.</i>	<i>mi.</i>	<i>fa.</i>	<i>sol.</i>	<i>la.</i>
			mélod.	harm					
Moyenne des expériences . . .	1	1,124	1,186	1,200	1,334	1,501	1,582	1,901	2,002
Intervalle pythagoricien	1	1,125	1,185		1,333	1,500	1,580	1,898	2,000
Intervalle de Zarlin	1	1,125	1,200		1,350	1,500	1,609	1,875	2,000
Valeur du comma.	"	0,014	0,015		0,017	0,019	0,020	0,024	0,025

L'erreur moyenne que comportent les expériences n'a jamais dépassé $\frac{1}{4}$ de comma, et a été en général bien inférieure.

La distinction des deux gammes mélodique et harmonique semble donc bien établie.

TEMPÉRAMENT. — Pour satisfaire à toutes les nécessités de la mélodie et de l'harmonie d'une manière parfaitement rigoureuse, il faudrait évidemment que les instruments à sons fixes, comme le piano, fussent pourvus de cordes et de touches donnant, non seulement chaque note naturelle ou pythagoricienne, mais aussi son dièse ou son bémol, ce qui ferait un très grand nombre de touches et de cordes par octave. Cela compliquerait évidemment beaucoup la construction et le jeu de l'instrument. Mais on peut remarquer que plusieurs de ces

notes ne différaient que fort peu, par exemple dans un même système *ut*^{*} et *ré*^b, *ré*^{*} et *mi*^b, *mi* et *fa*^b, et dans deux systèmes les notes de même nom. On peut donc, pour simplifier la construction des instruments à sons fixes, remplacer chacun de ces groupes de notes voisines par un ton moyen qui tiennne lieu de l'une quelconque d'entre elles. Alors la gamme chromatique se réduit à douze demi-tons, et, comme ils sont très peu différents, on a fini par leur attribuer une valeur commune, en partageant l'octave en douze intervalles rigoureusement égaux, que l'on a nommés *demi-tons moyens*.

La gamme ainsi modifiée se nomme *gamme tempérée*; elle n'est plus juste, et, à l'exception des octaves, tous les intervalles ont subi une altération; mais cette altération est si faible, que l'oreille n'en est que très peu affectée, soit dans la mélodie, soit dans l'harmonie. Comme l'intervalle d'octave est égal à 2, chacun des douze demi-tons égaux est $\sqrt[12]{2} = 1,060$, les tierces majeures et mineures sont $(\sqrt[12]{2})^4$ et $(\sqrt[12]{2})^3$; la quarte est $(\sqrt[12]{2})^5$; enfin la quinte devient $(\sqrt[12]{2})^7$. Voici les valeurs comparées de ces intervalles exacts et tempérés :

	Valeur vraie.	Valeur approchée.
• Demi-ton mineur.....	$\frac{25}{24} = 1,042$	$\sqrt[12]{2} = 1,060$
• Demi-ton majeur.....	$\frac{16}{15} = 1,067$	
Tierce mineure.....	$\frac{6}{5} = 1,200$	$(\sqrt[12]{2})^3 = 1,189$
Tierce majeure.....	$\frac{5}{4} = 1,250$	$(\sqrt[12]{2})^4 = 1,260$
Quarte.....	$\frac{4}{3} = 1,333$	$(\sqrt[12]{2})^5 = 1,335$
Quinte.....	$\frac{3}{2} = 1,500$	$(\sqrt[12]{2})^7 = 1,498$

LOGARITHMES ACOUSTIQUES. — On peut beaucoup simplifier la comparaison des intervalles musicaux en considérant, non plus les rapports qui les caractérisent, mais les logarithmes de ces rapports. L'intervalle de deux notes quelconques se trouve

alors en retranchant les logarithmes des nombres qui expriment ces notes, et des intervalles égaux correspondent à des différences logarithmiques constantes. Ainsi l'intervalle d'un ton sera

$$\log 9 - \log 8 = 0,05115,$$

et celui d'un demi-ton mineur

$$\log 25 - \log 24 = 0,01773.$$

On composera deux intervalles en ajoutant deux logarithmes, au lieu de multiplier deux rapports. Ainsi, pour obtenir l'intervalle de *ut* à *ré**, il suffira d'ajouter 0,01773 à 0,05115, ce qui donne 0,06888. L'octave s'exprime alors par $\log 2 = 0,3010300$,

le demi-ton moyen par $\frac{1}{12} \log 2$, et les autres intervalles de la gamme tempérée par des multiples de ce nombre.

On peut encore faire un pas de plus et prendre pour unité de mesure soit le demi-ton moyen, comme l'a fait de Prony, soit, ce qui semble plus naturel, le centième ou

le $\frac{1}{600}$ de l'octave. Dès lors, pour exprimer un intervalle quel-

conque en centièmes de ton, il faudra en chercher le logarithme et le diviser par le logarithme du centième de ton, soit

par $\frac{1}{600} \log 2 = \frac{1,003433}{2000}$. Cela revient à multiplier par 2,000,

et à diviser par 1,003433. Ce dernier facteur pourra, en général, être négligé, parce qu'il est sensiblement égal à l'unité, ou

bien on en tiendra compte en diminuant de $\frac{1}{300}$ de sa valeur

le produit obtenu. L'intervalle de quinte juste s'exprimera, par exemple, approximativement par

$$2000 \log \frac{3}{2} = 352,2,$$

et plus exactement par

$$552,2 - \frac{352,2}{300} = 351,0.$$

Le calcul rigoureux donnerait 350,9675. On trouve de la même

manière que le comma $\frac{81}{80}$ vaut à peu près 11 centièmes de ton (10,75); qu'un demi-ton mineur $\frac{25}{24} = 35$, le demi-ton majeur $\frac{16}{15} = 56$, que le ton mineur $\frac{10}{9} = 91$, et le ton majeur $\frac{9}{8} = 102$, etc. Enfin l'octave est représentée par 600.

Voici la valeur, en centièmes de ton, des vingt et une notes de la gamme complète ou *enharmonique*, et des douze de la gamme tempérée :

Gamme enharmonique	Intervalles.	Valeurs.	Gamme tempérée
<i>ut</i> 1	Unisson.	0	0
.....	Comma.	11	11
<i>ut</i> * $\frac{25}{24}$	Demi-ton mineur.	35	50
<i>re</i> ^b $\frac{27}{25}$	Demi-ton majeur.	67	
<i>re</i> $\frac{9}{8}$	Seconde majeure.	102	100
<i>re</i> * $\frac{75}{64}$	Seconde superflue.	137	150
<i>mi</i> ^b $\frac{6}{5}$	Tierce mineure.	158	
<i>mi</i> $\frac{5}{4}$	Tierce majeure.	193	200
<i>fa</i> ^b $\frac{32}{25}$	Quarte diminuée.	214	
<i>mi</i> * $\frac{125}{96}$	Tierce superflue.	228	250
<i>fa</i> $\frac{4}{3}$	Quarte.	249	
<i>fa</i> * $\frac{25}{18}$	Quarte superflue.	284	300
<i>sol</i> ^b $\frac{36}{25}$	Quinte diminuée.	316	
<i>sol</i> $\frac{3}{2}$	Quinte.	351	350

Gamme enharmonique.	Intervalle	Valeurs.	Gamme tempérée.
$sol^{\sharp} \frac{25}{16}$	Quinte superflue.	386	400
$la^{\flat} \frac{8}{5}$	Sixte mineure.	407	
$la \frac{5}{3}$	Sixte majeure.	442	450
$la^{\sharp} \frac{125}{72}$	Sixte superflue.	478	500
$si^{\flat} \frac{9}{5}$	Septième mineure.	509	
$si^{\flat} \frac{15}{8}$	Septième majeure.	544	550
$ut^{\flat} \frac{48}{25}$	Octave diminuée.	565	
$si^{\sharp} \frac{125}{64}$	Septième superflue.	579	600
ut^2 2	Octave.	600	

DIAPASON. — Il est indifférent de commencer une gamme par une note grave ou aiguë; mais, afin de pouvoir accorder les instruments entre eux, il a fallu convenir d'une hauteur déterminée, et, pour la fixer, on a imaginé le diapason. C'est une fourchette d'acier qui rend le son la_3 et qui, d'après une convention récente, exécute 435 vibrations par seconde ⁽¹⁾. Ce la_3 est le son que rend la troisième corde du violon; il appartient à la troisième octave de l'échelle musicale qui a pour son fondamental l' ut du violoncelle, ou ut_1 , qui fait par seconde 65,25 vibrations ⁽²⁾.

LIMITE DES SONS PERCEPTIBLES. — Si les vibrations des corps deviennent de plus en plus lentes ou de plus en plus rapides,

⁽¹⁾ *Moniteur universel*, 25 février 1859. Scheibler avait fixé, en 1833, la valeur du la normal à 440 vibrations (*Dove Repertorium*, III).

⁽²⁾ M. J.-L. SORER (*Journal de Physique*, 2^e série, t. IV, p. 506), propose d'abaisser le diapason international à 432 vibrations par seconde. L' ut_1 correspondrait alors exactement à 64 vibrations, et les ut d'ordre inférieur correspondraient tous à un nombre exact de vibrations jusqu'à l' ut_{-6} de 1 vibration par seconde.

il arrive un moment où les sons très graves ou très aigus cessent d'être entendus. On a admis d'abord que les limites de perceptibilité étaient fixes et comprises entre 16 et 5000 vibrations par seconde; mais il a été démontré depuis qu'elles sont variables pour diverses personnes et qu'elles dépendent surtout de l'amplitude des vibrations.

Avec des roues dentées d'un grand diamètre et dont les dents étaient larges, Savart produisait un son extrêmement intense, qui ne disparaissait qu'au moment où il y avait 24 000 vibrations par seconde. Despretz ⁽¹⁾ put reculer encore ces limites en étudiant des diapasons qui se succédaient par intervalles d'octaves. Il obtint des sons jusqu'à 36 000 vibrations.

D'un autre côté, Savart ⁽²⁾ annonça que la limite inférieure de perceptibilité se recule également quand l'intensité des sons augmente. Il faisait tourner une barre de fer B (*fig. 12*) autour d'un axe horizontal AA' et la disposait de manière qu'elle passât à chaque révolution à travers une fente CC' découpée dans une planche. Au moment où elle y entre, il se fait une sorte d'explosion, et quand elle tourne assez vite, on entend, outre des bruits successifs, un son d'une extrême gravité, qui correspond à 7 ou 8 vibrations. Mais Despretz a contesté les conséquences de cette expérience; car, si l'on dispose deux fentes au lieu d'une seule sur l'appareil de Savart, on ne produit pas de note à l'octave, comme cela devrait être. Il est donc probable que le son est développé par une cause différente. Dans tous les cas, les tuyaux d'orgue les plus longs ne peuvent pas dépasser 32 pieds, et le son qu'ils donnent alors, et qui est le plus grave qu'ils puissent rendre, correspond à 16 vibrations. M. Helmholtz ⁽³⁾ prétend même que les sons ne commencent à devenir perceptibles que vers 30 vibrations par seconde; suivant lui, le son fondamental des tuyaux de 32 pieds se perçoit comme une série de chocs séparés, et ce que l'on croit

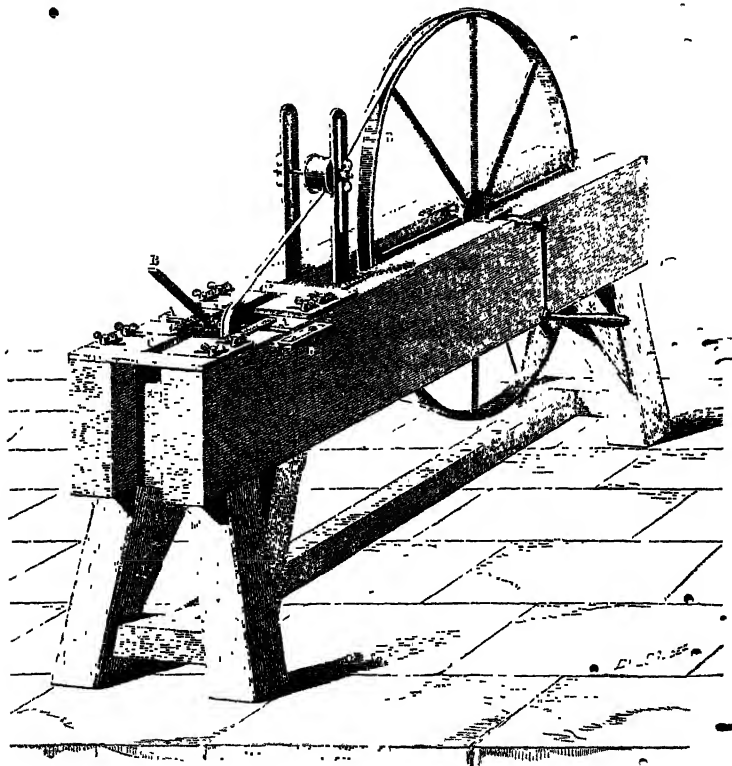
⁽¹⁾ DESPRETZ, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XX, p. 1477; 1845.

⁽²⁾ SAVART, *Annales de Chimie et de Physique*, 2^e série, t. XLVII, p. 69; 1832.

⁽³⁾ HELMHOLTZ, *Théorie physiologique de la Musique*, traduction de M. Guéroult, Chapitre IX; Paris, 1868.

entendre résulte des harmoniques supérieurs. M. Helmholtz a fait des observations sur ce sujet à l'aide d'une corde métal-

Fig. 12.



lique, tendue sur une caisse de résonance qui n'avait qu'une seule ouverture communiquant avec l'oreille par un tuyau de caoutchouc. Cette corde était lestée d'un petit poids qu'on plaçait de manière à éteindre les harmoniques élevés que la corde pouvait rendre. Le son le plus grave qu'il pût entendre avec cet appareil était le st_4 , de 31 vibrations.

CHAPITRE II.

VIBRATIONS LONGITUDINALES.

Vibration harmonique d'un point matériel. — Propagation des vibrations longitudinales dans un cylindre indéfini; vitesse de propagation. — Réflexion du mouvement vibratoire. — Réflexion avec changement de signe. — Vérifications expérimentales. — Réflexion sans changement de signe.

Tuyaux sonores. — Cas des tuyaux fermés. — Cas des tuyaux ouverts. — Instruments à vent. — Imperfections de la théorie précédente. —

Tuyaux à anche.

Vibrations longitudinales des liquides et des solides. — Liquides. — Solides.

VIBRATION HARMONIQUE D'UN POINT MATÉRIEL. — Nous savons maintenant quelles sont les qualités physiologiques des divers sons, et nous connaissons la loi simple qui lie leurs hauteurs au nombre des vibrations qui les produisent. Nous allons étudier ces vibrations en elles-mêmes, en commençant par le cas d'un point matériel unique.

Quand un point matériel appartenant à un milieu isotrope et illimité est écarté de sa position d'équilibre d'une quantité s , les forces élastiques qui tendent à l'y ramener agissent dans la direction opposée à celle du déplacement; elles sont d'autant plus grandes que l'écart est plus considérable et s'annulent avec cet écart. Pour de faibles déplacements on peut donc considérer la résultante de ces forces comme proportionnelle à s , et en désignant par m la masse du point, par t le temps, on a

$$(1) \quad m \frac{d^2 s}{dt^2} = -ps;$$

p est une constante positive.

La manière la plus générale de satisfaire à l'équation (1)

consiste à poser

$$(2) \quad s = -a \cos \sqrt{\frac{p}{m}} t + b \sin \sqrt{\frac{p}{m}} t;$$

a et b sont deux nouvelles constantes déterminées par les conditions initiales.

La vitesse v du point vibrant est

$$(3) \quad v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{p}{m}} \left(a \sin \sqrt{\frac{p}{m}} t + b \cos \sqrt{\frac{p}{m}} t \right).$$

Prenons pour origine des temps le moment où le point vibrant est le plus éloigné de sa position d'équilibre; pour $t = 0$, on a $v = 0$, et par suite b est nul. L'équation (2) montre qu'à cet instant l'écart possède sa valeur maximum a : c'est l'*amplitude de la vibration*; nous supposons qu'elle est donnée.

Le point vibrant prend la même elongation avec la même vitesse à des époques θ , données par la condition

$$\sqrt{\frac{p}{m}} \theta = \alpha + 2n\pi,$$

n étant un nombre entier quelconque. Il en résulte que la durée T d'une vibration est

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{p}}.$$

On introduit d'ordinaire la quantité T dans les équations (2) et (3); elles deviennent, en faisant $b = 0$,

$$(4) \quad s = -a \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

$$(5) \quad v = \frac{2\pi}{T} a \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

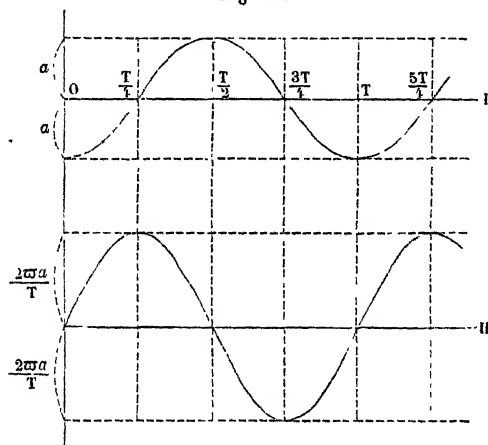
On appelle *intensité* de la vibration la force vive moyenne du point matériel

$$(6) \quad I = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{m}{2} \frac{4\pi^2 a^2}{T} \sin^2 \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{m\pi^2 a^2}{T^2}.$$

Pour des vibrations de même période, l'intensité est proportionnelle au carré de l'amplitude a .

Le mouvement vibratoire auquel se rapportent les équations (4) et (5) est désigné sous le nom de *vibration harmonique*. Il est susceptible d'une représentation géométrique très simple. Prenons les temps pour abscisses, les elongations s pour ordonnées; l'équation (4) représente une sinusoïde (fig. 13, I). Prenons maintenant les vitesses pour ordonnées (fig. 13, II); l'équation (5) représente une autre sinusoïde

Fig. 13.



dont les ordonnées maxima correspondent aux ordonnées nulles de la courbe des elongations, et inversement.

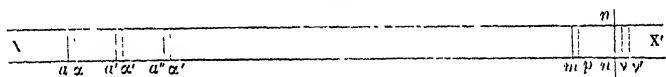
PROPAGATION DES VIBRATIONS LONGITUDINALES DANS UN CYLINDRE INDÉFINI; VITESSE DE PROPAGATION.

— Nous n'avons considéré jusqu'ici que les vibrations d'un point matériel unique; mais, quand un ébranlement quelconque est produit en un point d'un milieu élastique, l'équilibre est rompu dans toutes les parties de celui-ci, et les vibrations du point matériel se transmettent de proche en proche, d'après des lois qu'il convient d'étudier.

Considérons d'abord un cylindre indéfini XX' (fig. 14), formé par une substance solide, liquide ou gazeuse, élastique

et homogène, et supposons que, par un moyen quelconque, on communique à la tranche antérieure a des mouvements réguliers d'aller et de retour dans le sens XX' ; nous allons montrer qu'ils se transmettent dans toute la longueur du cy-

Fig. 14.

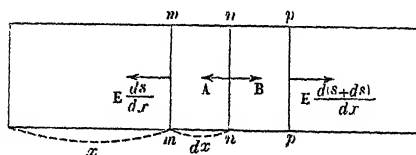


lindre, et que chaque section, telle que m , effectuera des vibrations régulières dans le sens de l'axe, et qu'on nomme *vibrations longitudinales*.

En effet, décomposons ce cylindre en tranches élémentaires aa' , $a' a''$, $a'' a'''$, Lorsque la section antérieure a aura reçu un déplacement ax , elle comprimera la première tranche, qui réagira par son élasticité et qui rentrera en équilibre quand elle aura fait reculer la deuxième section a' d'une quantité $a' \alpha'$, égale à ax . La deuxième tranche agira de la même manière, et ainsi de suite; par conséquent, tout se passera comme dans une série de billes élastiques au contact. La même suite d'actions se produirait si la section a , au lieu d'être chassée en avant, était tirée en arrière; seulement, les compressions seraient remplacées par des dilatations, et le mouvement de chaque section serait rétrograde.

Désignons par s l'élongation au temps t d'une section m (fig. 15) dont la distance à l'origine est x , à l'état de repos;

Fig. 15.



la section infiniment voisine n , située primitivement à la distance $x + dx$, possède au même instant une élongation $s + ds$; de telle sorte que la tranche A du cylindre, comprise entre les

deux sections, et dont la longueur au repos est dx , a pour longueur, au temps t , $dx + ds$ (ds est toujours supposé très petit par rapport à dx). Pour la maintenir dans cet état, il faudrait appliquer sur ses faces extrêmes des tensions proportionnelles à l'augmentation de volume, rapportée à l'unité de volume, c'est-à-dire à $\frac{\partial s}{\partial x}$. Nous désignerons leur valeur, rapportée à l'unité de surface, par $E \frac{\partial s}{\partial x}$.

La tranche A est contiguë à une tranche B limitée par les sections n et p , et dont les deux faces sont soumises à des tensions $E \frac{\partial(s + ds)}{\partial x}$ par unité de surface. La masse A est donc sollicitée à se mouvoir par la différence des tensions qu'elle supporte sur ces faces planes opposées, c'est-à-dire par une force dont la valeur par unité de surface est $E \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx$; cette force est dirigée vers m , c'est-à-dire tend à ramener la masse A dans sa position d'équilibre.

La vitesse dont une section quelconque, comprise entre m et p , est animée, est $\frac{\partial s}{\partial t}$; son accélération, $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$. En désignant par δ la masse de l'unité de volume de la matière dont est formé le cylindre, la masse du volume ayant pour section l'unité et pour longueur dx est δdx , et la force motrice qui lui est appliquée peut être exprimée par $\delta \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} dx$. Comme elle a aussi pour expression $E \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$, on a

$$(7) \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{E}{\delta} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2},$$

ou, posant, pour abrégér,

$$(8) \quad V^2 = \frac{E}{\delta},$$

$$(9) \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}.$$

Cette relation, très générale, est satisfaite en posant

$$(10) \quad s = F\left(t - \frac{x}{V}\right) + F_1\left(t + \frac{x}{V}\right).$$

F, F_1 sont des fonctions entièrement arbitraires, déterminées dans chaque cas par les conditions particulières du problème. Supposons d'abord que la tranche du cylindre $x = 0$ exécute des vibrations harmoniques telles que

$$(11) \quad s_0 = -a \cos \frac{2\pi t}{T};$$

on satisfera aux équations (9) en posant

$$(12) \quad s = -a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{VT} \right),$$

ou, faisant, pour abrégér,

$$(13) \quad VT = \lambda,$$

$$(12 \text{ bis}) \quad s = -a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

La quantité λ s'appelle la *longueur d'onde*, et $\frac{x}{V}$ la *phase* de la vibration. La phase est une durée.

On voit que, pour une même valeur de t, s prend des valeurs égales quand on fait $x = n\lambda$, n étant un entier arbitraire qui peut être égal à zéro.

On peut se représenter l'état vibratoire du cylindre à un moment quelconque t , en construisant une courbe avec les distances x pour abscisses et les valeurs de s pour ordonnées. La courbe est une sinusoïde (*fig. 16*) d'amplitude λ et dont l'ordonnée maximum est égale à a , c'est-à-dire à l'élongation maximum de la première tranche du cylindre.

Quand on fait varier t , la sinusoïde conserve toujours la même amplitude et la même ordonnée maximum; mais elle se transporte en quelque sorte tout d'une pièce en glissant le long de l'axe du cylindre de AA en $A'A'$, par exemple, de telle sorte que chaque tranche du cylindre partage successivement les mêmes états vibratoires que la tranche placée à l'origine.

et qu'il n'y a de différence que dans l'époque où chacune d'elles passe par sa position d'équilibre. En d'autres termes, les diverses tranches possèdent au même instant des phases différentes.

Désignons par x_0 l'abscisse du point dont l'ordonnée s est nulle au temps t . On a, d'après l'équation (12),

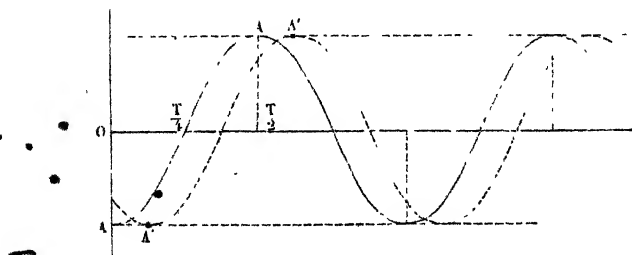
$$\frac{t}{T} - \frac{x_0}{VT} = n,$$

n étant un entier arbitraire, mais que nous supposons fixe ; on en tire

$$(14) \quad x_0 = V(t - nT);$$

la vitesse de translation $\frac{\partial x_0}{\partial t}$ de la courbe est donc constante et égale à V . On l'appelle la *vitesse de propagation* de l'onde sonore longitudinale ; elle est indépendante de la durée T de

Fig. 16.



la période. La longueur d'onde λ est au contraire proportionnelle à T .

Pour passer des élongations aux vitesses, il n'y a qu'à prendre la dérivée de l'équation (12) par rapport au temps

$$(15) \quad v = \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{2\pi a}{T} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

L'équation (15) représente une sinusoïde de même amplitude λ que celle des élongations et se déplaçant le long de l'axe avec la même vitesse V .

On a, entre la vitesse de propagation, la longueur d'onde et la période, la relation

$$(13) \quad \lambda = VT.$$

Soit $N = \frac{1}{T}$ le nombre de vibrations effectuées par seconde

$$(16) \quad \lambda = \frac{V}{N}.$$

La longueur d'onde est l'espace parcouru par l'onde sonore pendant la durée d'une vibration.

Nous avons supposé que la tranche $x = 0$ exécute une vibration harmonique. Si son mouvement était quelconque

$$S_0 = F(t),$$

on aurait toujours

$$S = F\left(t - \frac{x}{V}\right),$$

c'est-à-dire que le mouvement d'une tranche prise arbitrairement dans le cylindre à une distance $x = x_1$ exécute un mouvement identique à celui de $x = 0$, mais avec un retard constant $\frac{x_1}{V}$. En d'autres termes, le mouvement se propage sans altération avec une vitesse uniforme égale à V .

Nous ne considérerons désormais que des vibrations harmoniques. Nous établirons, en effet, par la suite, que tout mouvement périodique, c'est-à-dire susceptible d'éveiller la sensation de son, peut être considéré comme la superposition d'un nombre fini ou infini de vibrations harmoniques simples.

RÉFLEXION DU MOUVEMENT VIBRATOIRE. — Nous avons étudié la propagation des vibrations longitudinales dans un cylindre indéfini. Nous allons maintenant supposer que le cylindre soit terminé par un plan nn (fig. 14) et chercher les phénomènes qui se produiront à son extrémité. Il peut se présenter trois cas :

1° Il peut arriver que le cylindre soit continué par un milieu tel que la tranche finale mn lui transmette l'impulsion qu'elle a reçue et demeure ensuite en repos. Alors elle est dans le

même cas que toutes les sections qui la précèdent, et la propagation du son se fait jusqu'à l'extrémité du cylindre comme s'il était indéfini.

2° Il peut se faire que le second milieu oppose une résistance plus grande à la tranche finale mn ; alors, après qu'elle aura été comprimée par un déplacement mp de sa partie antérieure, elle se détendra et ne reviendra au repos qu'en exécutant un mouvement de retour de p vers m , c'est-à-dire en prenant une *vitesse contraire* à celle qu'elle a reçue; et cette vitesse déterminera de proche en proche et de tranche en tranche des condensations successives qui se propageront en sens inverse de X' vers X : c'est ce que l'on nomme le *mouvement réfléchi*. Dans le cas qui nous occupe, il sera le même que celui qui se propagerait de X' en X , *si l'extrémité n'exécutait des vibrations de signe contraire à celles que lui amène le mouvement direct de X' à X* . C'est ce que nous appellerons, pour abrégé, la *réflexion avec changement de signe*.

3° Enfin le cylindre considéré peut être continué par un milieu qui oppose une résistance moindre, et dans ce cas la section finale nn , après avoir éprouvé un déplacement nv , égal à celui des sections précédentes, continuera son mouvement de v en v' ; elle conservera donc une vitesse de *même signe* que celle qu'elle a reçue, et, la tranche mn se trouvant dilatée, il y aura encore un mouvement réfléchi qui se propagera de X' vers X , le même qui se produirait *si l'extrémité n'exécutait des vibrations de même signe que celles qu'elle reçoit du mouvement direct de X en X'* . C'est la *réflexion sans changement de signe*. Nous allons chercher maintenant comment les mouvements direct et réfléchi se superposent.

RÉFLEXION AVEC CHANGEMENT DE SIGNE. — Ce cas sera évidemment réalisé si le cylindre considéré est rempli de gaz ou de liquide et fermé par une paroi résistante, ou bien s'il est constitué par une verge solide encastrée dans un étau qui empêche le déplacement des molécules à l'extrémité fixée.

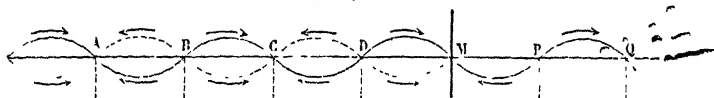
Alors la vitesse de vibration de chaque tranche intérieure est égale à la somme algébrique de celles que lui donnent l'onde directe et l'onde réfléchie. Désignons par L la longueur

totale du tuyau, par $L - x$ la distance de l'embouchure à une tranche quelconque, et supposons que la vitesse de la tranche $x = 0$ soit $v_0 = \frac{2\pi a}{T} \sin 2\pi \frac{t}{T}$; la vitesse directe sera, en posant $\frac{2\pi a}{T} = \alpha$,

$$v = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{L - x}{\lambda} \right).$$

Nous la représentons au temps 0 par la courbe sinusoïdale pleine ABCDM (fig. 17.) La vitesse réfléchie correspondra à un chemin total $L + x$ parcouru par l'onde; si nous suppo-

Fig. 17.



sons : 1° que la réflexion s'effectue dans un temps négligeable par rapport à la durée T de la vibration; 2° que la vitesse ait changé de signe sur le plan final dont nous supposons l'élasticité parfaite, la vitesse réfléchie sera

$$v' = -\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{L + x}{\lambda} \right).$$

Elle est représentée au temps 0 par la courbe ponctuée MDCBA symétrique du prolongement MPQ de la première sinusoïde. Les flèches se rapportent, sur chaque courbe, à la direction de la vitesse.

Chaque tranche du cylindre sera animée d'une vitesse

$$v_1 = v + v',$$

$$\begin{aligned} (17) \quad v_1 &= \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{L}{\lambda} + \frac{x}{\lambda} \right) - \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{L}{\lambda} - \frac{x}{\lambda} \right) \\ &= 2\alpha \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{L}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

Les fig. 17, 18, 19 et 20 permettent de suivre la manière dont la vitesse incidente et la vitesse réfléchie se composent pour

donner le résultat représenté par la formule (17). Ces figures se rapportent au temps 0, $t_1 < \frac{T}{2}$, $\frac{T}{2}$, $t_2 > \frac{T}{2}$; dans chacune d'elles la courbe pleine représente la vitesse v , la courbe pointillée — v' . Aux points où les deux ordonnées sont égales et de même signe, on a donc $v_1 = 0$; au contraire, v_1 est maximum aux points où ces ordonnées sont égales et de signe contraire; les flèches indiquent la direction de la vitesse résultante. L'examen des courbes et la discussion de la formule (17) établissent que :

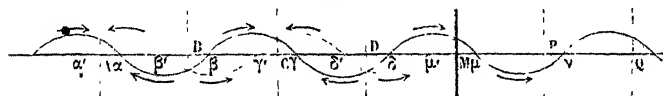
1° Pour $x = 0$, c'est-à-dire à l'extrémité du cylindre, la vitesse résultante est nulle, quel que soit t . Il en est de même pour $x = n \frac{\lambda}{2}$, n étant un entier quelconque. Les points ainsi définis se nomment des *nœuds* de vibration.

2° Pour une valeur quelconque de t , la vitesse est maximum aux points pour lesquels $x = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$. Ces points se nomment des *ventres* de vibration. En reculant à partir de l'extrémité du cylindre de quantités égales respectivement à $\frac{\lambda}{4}$, $2 \frac{\lambda}{4}$, $3 \frac{\lambda}{4}$, ..., on rencontre alternativement un ventre et un nœud.

3° Si l'on parcourt le cylindre dans un sens déterminé, on reconnaît que les nœuds sont les points où la vitesse résultante change de signe; les vitesses de vibration sont à un même instant de sens contraire dans les internœuds successifs.

4° Pour une valeur invariable de x , le coefficient de $\cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{L}{\lambda} \right)$ est constant. La vibration de chaque point est donc une vibration harmonique; de plus, la phase $\frac{L}{\lambda}$ de

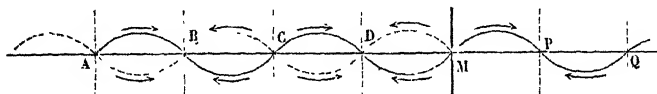
Fig. 18.



cette vibration est la même pour tous les points du cylindre. Les vitesses sont donc en même temps nulles ou maximum pour tous les points.

La compression du milieu vibrant en chaque point s'évalue par les considérations suivantes. La tranche comprise entre les plans dont les abscisses au temps 0 sont x et $x + dx$ avait

Fig. 19.



au temps 0 l'épaisseur dx ; mais au temps t le plan antérieur a avancé d'une quantité s , le plan postérieur d'une quantité $s + \frac{\partial s}{\partial x} dx$; le volume de la tranche a donc augmenté de $\frac{\partial s}{\partial x} dx$: la pression moyenne ⁽¹⁾ a subi une variation pro-

(1) Si l'on admettait que les pressions au sein d'une masse gazeuse vibrante obéissent à la loi de Mariotte, on aurait, en désignant par P la pression initiale,

$$P dx = (P + dP) \left(dx + \frac{\partial s}{\partial x} dx \right),$$

d'où

$$dP = - \frac{P \frac{\partial s}{\partial x}}{1 + \frac{\partial s}{\partial x}}$$

ou, à cause de la petitesse de ds ,

$$dP = - P \frac{\partial s}{\partial x}.$$

Si l'on admet, au contraire, qu'un gaz vibrant se transforme à chaleur constante, on a (voir t. II, 3^e fascicule)

$$P dx^{\frac{C}{C-1}} = (P + dP) \left(dx + \frac{\partial s}{\partial x} dx \right)^{\frac{C}{C-1}}$$

et, à la limite,

$$dP = - \frac{C}{C-1} P \frac{\partial s}{\partial x}.$$

On verra plus loin que cette dernière hypothèse est de beaucoup la plus voisine de la réalité.

VIBRATIONS LONGITUDINALES.

portionnelle à $-\frac{\partial s}{\partial x}$; mais nous avons

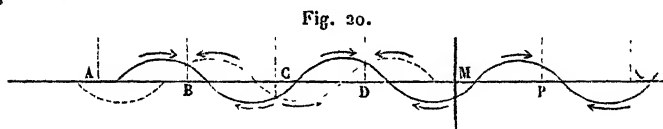
$$(17) \quad v_1 = \frac{\partial s}{\partial t} = 2\alpha \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{L}{\lambda} \right),$$

d'où

$$s = 2\alpha \frac{T}{2\pi} \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{L}{\lambda} \right),$$

$$-\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{2\alpha T}{\lambda} \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Le rythme de la variation de la pression est donc le même que celui des vitesses, c'est-à-dire que la pression en un point passe, dans un intervalle égal à T , par toutes les valeurs



dont elle est susceptible. Les plus grandes variations de pression ont lieu aux nœuds; aux ventres, la pression est invariable.

VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES. — La position des nœuds et des ventres peut être vérifiée par une expérience remarquable que l'on doit au colonel N. Savart ⁽¹⁾. Il plaça à 40^m ou 50^m d'une muraille verticale un timbre qu'il fit vibrer. Évidemment les rayons sonores qui tombaient normalement sur la paroi devaient, en se réfléchissant, produire les alternatives de nœuds et de ventres dont nous venons de parler. Pour les reconnaître, on tendit d'abord, à partir du timbre, une corde normale à la muraille et, en promenant ensuite l'oreille tout le long de sa longueur, on trouva des points où le son était très intense; c'étaient les ventres, et d'autres où il disparaissait presque en-

⁽¹⁾ N. SAVART, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. VII, p. 1068; 1838.

tièrement, c'étaient les nœuds. On les marqua sur la corde et, en mesurant leurs distances, on trouva qu'elles étaient égales entre elles et à la longueur de l'onde, avec cette seule exception que le dernier nœud était un peu plus près de la muraille que les autres de leurs voisins.

Il se présenta même une circonstance qu'il faut noter et qu'on pouvait prévoir. Comme le timbre produit plusieurs harmoniques superposés, par exemple 1 et 2, les internœuds qui correspondent au dernier de ces sons devaient être la moitié de ceux qui résultent du premier. Aussi y avait-il des nœuds communs où l'oreille ne saisissait aucun son et des points où se confondaient un nœud du son aigu et un ventre du son grave, qui seul était entendu. D'autres harmoniques ayant ensuite été produits à la fois et à dessein, on parvint à les entendre séparément, parce que leurs nœuds et leurs ventres se formaient en des points différents. Nous aurons bientôt l'occasion de montrer que les mêmes phénomènes se développent avec les liquides et avec les solides.

RÉFLEXION SANS CHANGEMENT DE SENS. — Le deuxième cas de la réflexion du son à l'extrémité d'un cylindre est celui où la dernière tranche conserve une portion de la vitesse qu'elle a reçue par les impulsions directes. Il sera réalisé si le cylindre est une verge métallique libre à son extrémité et même s'il est constitué par un tuyau plein d'air ouvert dans l'atmosphère; car ce qui détruit la vitesse d'une section moyenne, c'est la compression qu'elle communique à la tranche suivante, et, comme l'air ambiant peut se dilater dans tous les sens, il oppose une résistance moindre aux molécules extrêmes qui ne sont point ramenées au repos. Nous supposerons d'abord cette résistance tout à fait négligeable.

Conservant les notations de l'article précédent, on a

$$v = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{L-x}{\lambda} \right), \quad v' = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{L+x}{\lambda} \right),$$

$$(15) \quad v_1 = v + v' = 2\alpha \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{L}{\lambda} \right).$$

La variation de pression est proportionnelle à

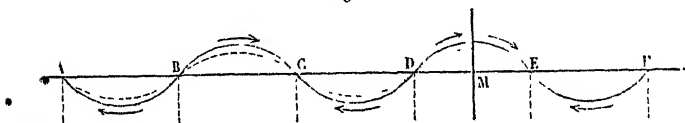
$$-\frac{2\alpha l}{\lambda} \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} \right).$$

Ces formules sont les mêmes que celles de l'article précédent, à un facteur constant et au signe près; mais il faut remarquer que la formule qui donnait les vitesses vibratoires donne maintenant les variations de pression prises en signe contraire et inversement. Là où se trouvait un nœud se trouve un ventre, et là où était un ventre se forme un nœud. Le point où s'effectue la réflexion sans changement de signe est un ventre.

Les *fig. 21* et *22*, dans lesquelles la courbe pleine représente v , la courbe ponctuée v' , montrent comment s'effectue la composition des vitesses pour $t = \frac{T}{4}$ et pour une autre valeur de t .

Considérons d'abord l'onde incidente ABCD au moment où l'un de ses ventres mobiles atteint l'extrémité M (*fig. 21*).

Fig. 21.



L'onde réfléchie serait, comme précédemment, symétrique à la courbe prolongée EF et se superposerait à ABCD; pour l'en distinguer, on a attribué des ordonnées un peu plus petites à la courbe ponctuée. Les vitesses n'ayant point changé de signe par la réflexion, on voit par la figure qu'elles s'ajoutent aux vitesses directes dans les espaces MD, DC, CB, BA, et que le mouvement est nul en D, C, B, A.

Si le temps croît, l'onde directe marche vers la paroi et l'onde réfléchie s'en éloigne d'une même quantité (*fig. 22*). Par suite, les deux vitesses sont toujours égales et contraires aux points D, C, B, A, où se trouvent des nœuds fixes; elles sont, au contraire, toujours égales et de même signe en M et aux milieux des espaces DC, CB, BA, qui sont des ventres.

Nous avons supposé jusqu'ici que les vitesses réfléchies avaient, au signe près, la même grandeur que les vitesses incidentes. Cela n'est point exactement vrai; elles sont toujours plus faibles à cause de la perte de force vive qui se fait au bout

Fig. 22.



du cylindre. Mais cet affaiblissement se réduit à diminuer les ordonnées de la courbe réfléchie dans un rapport constant. Par suite, les nœuds ne sont plus que des points où les vitesses sont minima sans être toujours nulles, et les ventres les lieux où la densité change le moins sans rester absolument constante; mais cela ne modifie en rien les conséquences que nous allons déduire de cette théorie élémentaire.

TUYAUX SONORES.

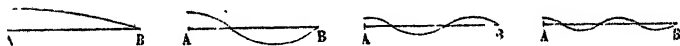
Les tuyaux sonores sont des tubes formés par des parois suffisamment rigides, de nature quelconque, et contenant une masse d'air qu'on met en vibration au moyen d'*embouchures*, à travers lesquelles on souffle et sur le rôle desquelles nous reviendrons bientôt. La plus simple est l'embouchure de flûte ordinaire.

La théorie générale que nous venons d'indiquer doit s'appliquer aux tuyaux sonores, pourvu que les parois ne prennent pas une part trop active à la vibration et que le tuyau soit assez étroit pour qu'on puisse considérer une tranche perpendiculaire à l'axe comme vibrant tout d'une pièce. Cela posé, la hauteur du son rendu par les tuyaux doit être indépendante de la matière dont ils sont formés, de leur section, pourvu qu'elle soit suffisamment petite, enfin de leur forme; ils peuvent être droits ou courbes sans que cela produise une influence sensible. Enfin, quelle que soit l'embouchure qu'on leur adapte, comme elle n'est qu'un moyen de mettre l'air en vibration, elle ne change pas la hauteur du son; seulement elle modifie le

timbre. Cela étant, nous allons considérer des tuyaux cylindriques longs, étroits, rectilignes, embouchés d'une manière quelconque, et les lois que nous trouverons seront applicables aux instruments à vent. Elles sont dues à Daniel Bernoulli (1).

CAS DES TUYAUX FERMÉS. — Nous admettrons d'abord avec Bernoulli que la densité de l'air à l'embouchure du tuyau ne diffère pas sensiblement de sa densité à l'extérieur. Il en résulte que cette embouchure ne peut être qu'un ventre de vibration; d'autre part, le fond du tuyau, sur lequel les vibrations se réfléchissent en changeant de signe, est un nœud. Ces conditions déterminent les divers modes de vibration dont la masse d'air du tuyau est susceptible. Ils sont représentés par la fig. 23, suivant qu'il y a entre l'embouchure et le fond

Fig. 23.



0, 1, 2, 3 nœuds intermédiaires. On voit que la longueur L du tuyau est égale à un nombre impair de fois la demi-distance de deux internœuds, c'est-à-dire $\frac{\lambda}{4}$,

$$(16) \quad L = (2n - 1) \frac{\lambda}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{\lambda}{4} = \frac{L}{2n - 1};$$

mais on a $\lambda = VT = \frac{V}{N}$, V désignant la vitesse de propagation, N le nombre de vibrations rendues par seconde; on a donc

$$(17) \quad N = \frac{V}{\lambda} = \frac{(2n - 1)V}{4L}.$$

Faisant d'abord $n = 0$, on a

$$N_0 = \frac{V}{4L}.$$

(1) D. BERNOULLI, *Mém. de l'Académie des Sciences*, 1762.

Le son correspondant est le son fondamental du tuyau; on a ensuite

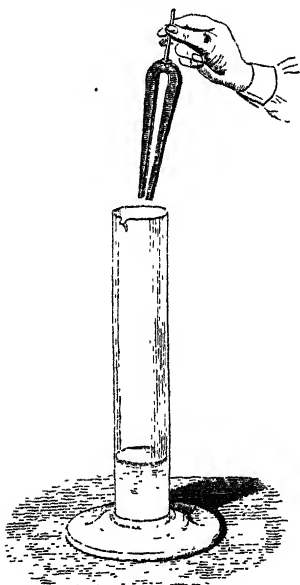
$$N_1 = 3N_0, \quad N_2 = 5N_0, \quad \dots$$

Si le premier de ces sons est ut_1 , le tuyau pourra donner les notes

$$ut_1, \quad sol_2, \quad mi_3, \quad \dots$$

On peut vérifier ces résultats par diverses expériences. On

Fig. 24.



montre d'abord que les tuyaux ne peuvent rendre que certains sons déterminés en soutenant au-dessus d'une éprouvette à pied (fig. 24) un diapason qui fait N vibrations par seconde. Généralement on peut le faire vibrer sans que le tuyau parle; mais, en versant de l'eau dans l'éprouvette, la longueur du tuyau diminue peu à peu, et, quand elle satisfait à l'équation

$$N = \frac{(2n-1)V}{4L},$$

ce tuyau résonne fortement. On fait la même expérience en disposant tout près d'un timbre en vibration (fig. 25) un tuyau à fond mobile qui détermine un

renforcement remarquable du son lorsque sa longueur est convenable.

La formule $N = \frac{(2n-1)V}{4L}$ fait voir que, pour un même mode de division, le nombre des vibrations N est en raison inverse de L : pour le vérifier, on dispose sur une soufflerie une série de tuyaux dont les longueurs sont

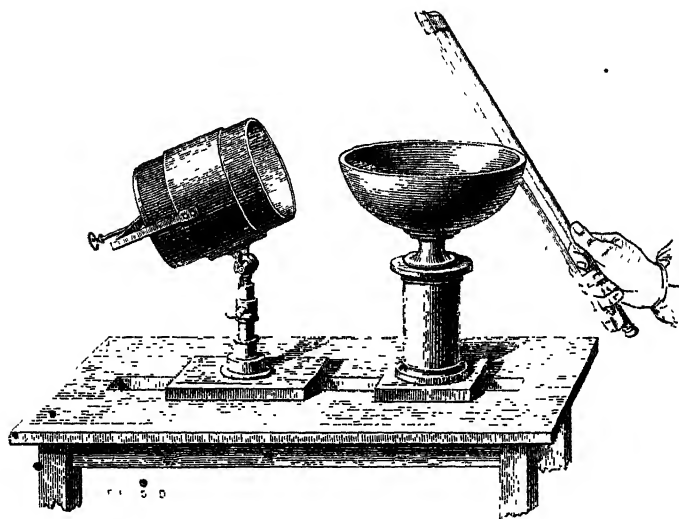
$$1, \quad \frac{8}{9}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{8}{15}, \quad \frac{1}{2};$$

on trouve qu'il donne les notes de la gamme naturelle, et par conséquent des nombres de vibrations

$$\frac{9}{8}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{5}{3}, \quad \frac{15}{8}, \quad 2,$$

qui sont en raison inverse de la longueur L . Toutefois, l'expérience montre que cette loi n'est qu'approximative, ce qui tient à des causes perturbatrices que nous ferons connaître.

Fig. 5.

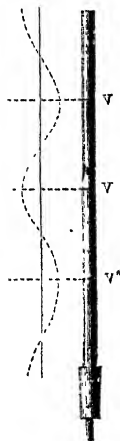


Enfin, si l'on veut produire les harmoniques divers que peut rendre un tuyau fermé, on le place sur la soufflerie et l'on y fait arriver l'air avec une rapidité croissante par un robinet qu'on ouvre peu à peu. Si le tuyau est long et étroit, il rend successivement tous les harmoniques, et l'on trouve qu'ils suivent la loi des nombres 1, 3, 5, 7,

CAS DES TUYAUX OUVERTS. — Lorsqu'un tuyau est ouvert dans l'air par son extrémité opposée à l'embouchure, Bernoulli admet que cette extrémité est un ventre pour les mêmes motifs que l'embouchure elle-même. Cela revient à supposer qu'à

l'extrémité ouverte du tuyau les vibrations éprouvent une réflexion sans changement de signe, c'est-à-dire que la résistance opposée à la propagation des vibrations par l'atmosphère

Fig. 26.



illimitée est négligeable par rapport à la résistance qui s'exerce à l'intérieur même du tuyau. En admettant l'hypothèse de Bernoulli, on voit qu'il peut y avoir dans l'intérieur du tuyau un nombre quelconque de nœuds : le premier à une distance de l'extrémité égale à $\frac{\lambda}{4}$, et tous les autres séparés par un intervalle égal à $\frac{\lambda}{2}$ (fig. 26).

Pour que le tuyau parle, il faut encore que les vibrations réfléchies, au moment où elles reviennent à l'embouchure, soient concordantes avec les vibrations de cette embouchure; et, comme elles n'ont point changé de signe au moment de la réflexion, il faut que le chemin parcouru pour aller et revenir, c'est-à-dire la double longueur $2L$ du tuyau, soit égal à un nombre pair de demi-longueurs d'onde ou à $2n\frac{\lambda}{2}$:

$$L = n \frac{\lambda}{2}.$$

Si donc on suppose

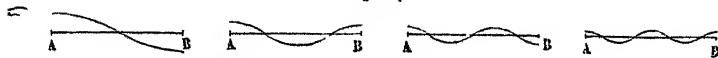
$$n = 1, 2, 3, 4,$$

il en résulte

$$\lambda = \frac{2L}{1}, \quad \frac{2L}{2}, \quad \frac{2L}{3}, \quad \frac{2L}{4},$$

et les nœuds sont disposés comme l'indique la fig. 27.

Fig. 27.



Le nombre des vibrations N s'obtient en remplaçant λ par $\frac{N}{V}$,

ce qui donne en général

$$N = \frac{nV}{2L},$$

et dans chacun des modes de division précédents

$$N = \frac{V}{2L}, \quad 2 \frac{V}{2L}, \quad 3 \frac{V}{2L}, \quad 4 \frac{V}{2L};$$

par conséquent les notes que le tuyau peut rendre sont les harmoniques 1, 2, 3, 4, ..., ou bien

$$ut_1, ut_2, sol_2, ut_3, mi_3, sol_3, \dots$$

Il résulte de là que le son fondamental dont le nombre des vibrations est $\frac{V}{2L}$ est à l'octave grave du son $\frac{V}{4L}$ qui serait pro-

duit par un tuyau fermé de même longueur, ou, en d'autres termes, qu'un tuyau fermé donne la même note fondamentale qu'un tuyau ouvert de longueur double. C'est ce que l'on vérifie avec l'appareil de la *fig. 28*, en faisant glisser dans son milieu une coulisse mi-partie pleine et évidée, qui en fait à volonté un tuyau fermé de longueur 1, ou un tuyau ouvert de longueur 2, sans que le son soit changé.

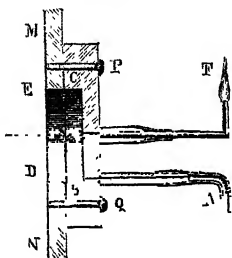
Cette expérience est une première vérification des lois de Bernoulli; mais on peut démontrer directement que dans le tuyau ouvert AC il y a un nœud à la tranche moyenne B quand il rend le son fondamental. Il suffit pour cela de laisser descendre dans ce tuyau une membrane de boudruche suspendue à trois fils comme un plateau de balance, et couverte de sable. Elle vibre et le sable s'agite quand elle est placée partout ailleurs qu'en B; mais en ce point elle reste immobile, ainsi que le sable, ce qui prouve que l'air est en repos et qu'il y a un nœud.

Fig. 28.



On doit à M. Kœnig ⁽¹⁾ un autre moyen de vérifier la position des ventres et des nœuds dans les tuyaux sonores. La paroi MN du tuyau (*fig. 29*) est percée, à l'endroit où doit se former un nœud, d'un trou ED, qui est fermé par une membrane flexible CB; celle-ci est recouverte par une capsule en

Fig. 29.



bois CBPQ dans laquelle circule un courant de gaz de l'éclairage qui arrive par A et qu'on allume à sa sortie F. Quand le tuyau parle et qu'il y a une compression au nœud, la membrane est chassée vers l'intérieur de la capsule et la flamme F s'élève; quand il y a dilatation, CB est attirée vers l'intérieur du tuyau, la flamme décroît, et, si on l'a convenablement réglée, elle s'éteint. Si la capsule est placée

vis-à-vis d'un ventre, elle n'éprouve ni dilatation ni compression, et la flamme demeure immobile.

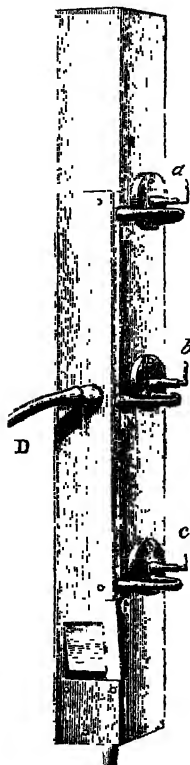
La *fig. 30* représente un tuyau ouvert, muni de trois capsules manométriques *a, b, c*, appliquées aux endroits où se forment le nœud du son fondamental et les deux nœuds de son octave. Lorsqu'on produit cette octave, les deux flammes extrêmes *a* et *c* entrent en vibration, pendant que celle du milieu *b*, située sur un ventre de vibration, reste tranquille. Si l'on donne le son fondamental, les flammes sont agitées toutes les trois, mais celle du milieu plus vivement que les deux autres, parce qu'elle se trouve sur le nœud, les deux autres étant à mi-chemin entre le nœud et les deux ventres, et elle s'éteint.

Supposons maintenant que les flammes soient alimentées par un courant de gaz rapide; elles ne s'éteindront pas, mais elles éprouveront aux moments des dilatations et des condensations du nœud des diminutions et des augmentations de longueur. On ne s'en apercevra pas, à cause de la persistance des impressions; mais si, vis-à-vis des tuyaux A, A (*fig. 31*),

(1) R. KOENIG, *Annales de Poggendorff*, t. CXXII, p. 242 et 660; t. CXLVI, p. 161; 1864-1872.

munis de capsules manométriques, on dispose un miroir tournant C, l'image M des flammes α , α' formera deux lignes si-

Fig. 30.



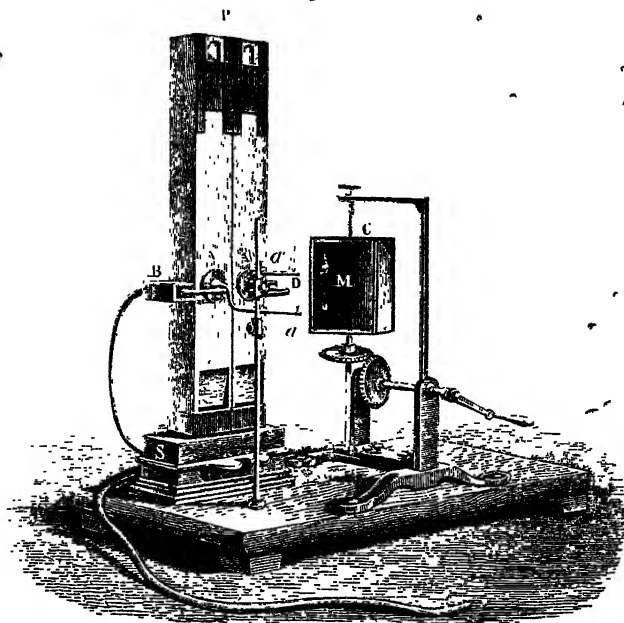
nueuses où ces flammes paraîtront alternativement élevées et raccourcies (¹).

Les ventres jouissent toujours de la propriété que, si on les

(¹) La *fig.* 31 montre deux tuyaux adaptés sur un même sommier. Quand une compression se produit dans l'un d'eux, par réaction une dilatation se produit dans l'autre, et, bien que les deux tubes soient d'accord, ils prennent l'un sur l'autre une différence de phase égale à $\frac{T}{2}$. Il en résulte que, dans la *fig.* 32, les images des flammes sont alternées.

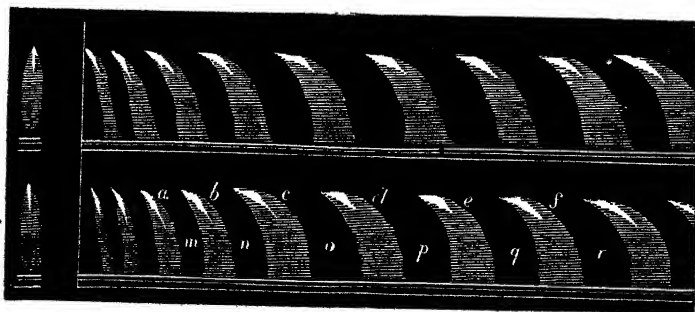
met en relation avec l'air extérieur, l'état vibratoire du tuyau

Fig. 31.



n'est pas troublé, tandis que le son change dès qu'une ouverture est pratiquée en tout autre point. Par exemple, si le tuyau

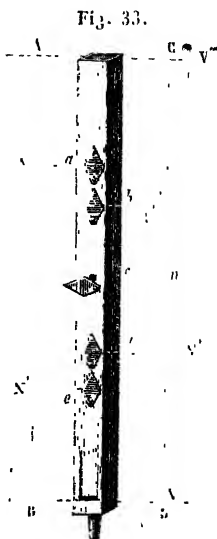
Fig. 32.



rend le deuxième harmonique ANN'B (fig. 33), on ne change

rien au son produit si l'on débouche le trou *c*, puisqu'il y avait déjà un ventre en ce point, mais on le modifie en ouvrant les clefs *c* et *a*, qui correspondent à des nœuds. De même, lorsque le tuyau rend le troisième harmonique $VV'V''V'''$, on change le son en ouvrant l'un ou l'autre des orifices *a*, *c*, *e*, parce qu'on y développe des ventres qui n'y étaient point; mais on ne fait pas varier la note en débouchant les trous *b* et *d*, qui correspondent à des ventres existants.

Les nœuds, à leur tour, jouissent de cette propriété, qu'on peut oblitérer complètement un tuyau en un point qui correspond à un nœud sans changer le son. Par exemple, si l'on enfonce un piston dans un tuyau de façon qu'il parle, le tuyau parlera de nouveau, et en rendant le même son, quand on aura amené le piston au nœud suivant, en le poussant d'une quantité égale à la demi-longueur d'onde du son produit.



IMPERFECTIONS DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE. — Quand on calcule le nombre de vibrations du son rendu par un tuyau cylindrique, d'après la théorie de Bernoulli, on obtient un résultat un peu trop élevé, soit pour le son fondamental ou pour les harmoniques. Toutefois le rapport du nombre des vibrations des divers sons que le tuyau peut rendre est bien celui qui est assigné par la théorie.

Quand on fait rendre au tuyau un harmonique élevé, et que, par l'un des moyens que nous indiquerons ultérieurement, on mesure la distance de deux nœuds consécutifs, on la trouve rigoureusement égale à la demi-longueur d'onde du son rendu; tandis que la distance du premier nœud à l'embouchure dans les tuyaux fermés, la distance des nœuds extrêmes à l'embouchure et à l'orifice dans les tuyaux ouverts, est inférieure au quart de la longueur d'onde du son rendu; il en résulte que la théorie est exactement applicable au corps d'un tuyau sonore,

qu'elle ne l'est pas à ses extrémités. L'embouchure et l'orifice ne peuvent donc être considérés comme étant rigoureusement des ventres de vibration.

Examinons d'abord ce qui se passe au voisinage de l'orifice d'un tuyau ouvert. A l'intérieur du tuyau se propagent deux ondes planes, l'une directe, l'autre réfléchie sans changement de signe, dont l'interférence produit un état de vibration stationnaire caractérisé par l'existence de nœuds et de ventres de vibration. Au delà du tuyau et à une distance suffisante de son embouchure, le son produit se propage par ondes sphériques ayant leur centre au centre de l'orifice; mais il est inexact d'admettre que le passage d'un système d'ondes à l'autre s'opère brusquement dans une tranche infiniment mince, coïncidant avec le plan de l'orifice. En réalité, ce passage s'effectue progressivement, de telle sorte qu'un peu au delà de l'orifice il y a encore superposition d'une onde directe et d'une onde réfléchie, et que, à une faible distance en arrière, on ne peut déjà plus considérer les ondes comme stationnaires.

L'étude analytique des vibrations au voisinage de l'orifice d'un tuyau ouvert a été faite par M. Helmholtz ⁽¹⁾. Il a démontré : 1° que le plan de l'orifice ne peut être rigoureusement considéré comme un ventre; 2° que, dans le cas des tubes étroits, on peut toujours remplacer l'effet de l'orifice en supposant le tuyau réel, de longueur L , prolongé d'une quantité γ , et calculant ensuite d'après la théorie élémentaire la hauteur des sons produits. En particulier, si s est la section du tube, r le rayon de l'orifice supposé très petit, on a

$$\gamma = \frac{s}{2r}.$$

Pour un tube dont l'orifice est égal à la section ($s = \pi r^2$), la valeur de la correction diminue proportionnellement à r ; elle

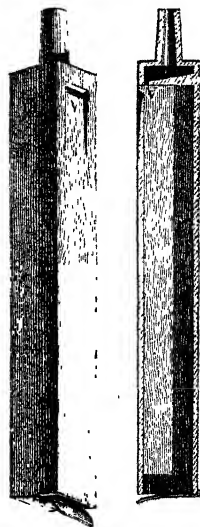
⁽¹⁾ HELMHOLTZ, *Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden* (*Journal de Crelle*, LVII, 1860). Voir aussi la *Mécanique de Kirchhoff* (*Vorlesungen über Mathematische Physik*), 41^e Leçon, p. 323, où la théorie complète des tuyaux sonores est exposée d'une manière particulièrement élégante.

est négligeable pour des tubes excessivement étroits. Pour des tubes de section invariable, mais dont on rétrécit artificiellement l'orifice, γ augmente (et par suite le son rendu baisse) à mesure qu'on rend l'orifice plus étroit. C'est ce que la pratique a appris depuis longtemps aux facteurs d'orgues. Ils disposent au-dessus des tuyaux ouverts, soit une lame métallique inclinée (*fig. 34*), soit deux lèvres mobiles, et s'en servent pour rétrécir à volonté l'orifice et faire varier le ton de petites quantités, quand ils accordent ensemble les tuyaux.

EMBOUCHURE DE FLÛTE. — En ce qui concerne l'embouchure, nous avons admis, dans notre théorie, que les vibrations des tuyaux étaient produites par un mouvement de va-et-vient régulier de la tranche extrême en communication avec l'atmosphère; tandis qu'en général les tranches voisines de l'extrémité sont affectées d'une manière dissymétrique par les vibrations propres de l'embouchure, et que la libre communication avec l'atmosphère est plus ou moins interceptée.

Occupons-nous d'abord de l'*embouchure de flûte*. Elle se compose (*fig. 34*) d'une fente ou *lumière* par laquelle on souffle, et d'un biseau contre lequel la lame d'air issue de la lumière vient se briser. On admet le plus souvent que, par suite de vibrations du biseau, le courant d'air est tantôt rejeté à l'extérieur, tantôt pénétre complètement dans l'intérieur, de manière à produire une série d'impulsions régulières. Mais les recherches expérimentales de Lootens ⁽¹⁾ semblent établir que les choses se passent d'une manière plus compliquée. En injectant de la fumée dans la région d'un tuyau voisin de l'embouchure, il a constaté qu'elle tourbillonnait et se divisait généralement en

Fig. 34.



(¹) *Journal de Physique*, 4^{re} série, t. VI, p. 53; 1877.

deux branches, dont l'une sortait par l'embouchure directement, tandis que l'autre sortait aussi par l'embouchure, mais après avoir décrit dans l'intérieur du tuyau une trajectoire en forme de boucle. En définitive, la vibration de l'air dans le tuyau pourrait, dans certains cas, n'être accompagnée que d'un courant d'air insignifiant, traversant le tuyau d'orgue d'une extrémité à l'autre, tandis que la presque totalité de l'air s'échapperait par la lumière.

Quoi qu'il en soit, le régime normal de vibration ne peut s'établir qu'à une certaine distance au delà de l'embouchure, et la théorie de Bernoulli est encore en défaut; l'expérience apprend qu'il suffit d'introduire une correction analogue à celle que nous avons employée pour l'orifice, c'est-à-dire qu'on peut appliquer la théorie élémentaire, à la condition de supposer le tuyau prolongé d'une quantité x que l'expérience déterminera.

En résumé, un tuyau ouvert réel de longueur L , muni d'une embouchure de flûte, équivaut à un tuyau ouvert théorique de longueur $L + x + y$. Pour un tuyau fermé, les deux corrections se superposent, puisque l'orifice se confond avec l'embouchure, un tuyau réel de longueur L équivaut à un tuyau théorique de longueur $L + x'$. De nombreuses expériences réalisées par Wertheim ⁽¹⁾, et sur lesquelles nous revenons à propos de la mesure de la vitesse du son ⁽²⁾, ont permis à ce

⁽¹⁾ WERTHEIM, *Annales de Chimie et de Physique*, 3^e série, t. XXXI, p. 404; 1851. En désignant par S la section du tube, égale à celle de l'orifice, par s celle de la lumière, Wertheim trouve

$$x + y = c' \sqrt{S} \left(2 - \sqrt{\frac{s}{S}} + \sqrt{\frac{S}{s}} \right),$$

avec $c' = 0,187$ (verre, métal, bois),

$$x' = c' \sqrt{S} \left(1 - \sqrt{\frac{s}{S}} + \sqrt{\frac{S}{s}} \right),$$

avec $c' = 0,210$ (verre, métal), $c' = 0,240$ (bois).

La valeur de ces corrections peut être assez considérable; ainsi, pour un tuyau de plomb de 43^{mm} de diamètre et de 120^{mm} de long, Wertheim a trouvé expérimentalement $x' = 68^{\text{mm}}, 1$.

⁽²⁾ Voir au Chapitre correspondant.

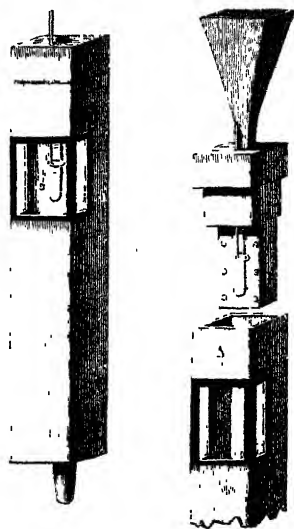
physicien d'établir des formules empiriques pour les corrections $x + \gamma$ et x' .

EMBOUCHURE A ANCHE. — L'*anche* est une lame solide vibrante, fixe par l'une de ses extrémités, libre à l'autre. On adapte aux tuyaux d'orgue deux sorte d'anches. L'*anche battante* ferme complètement une gouttière demi-cylindrique, contre le bord de laquelle elle est maintenue par une tige d'acier nommée *rasette*, permettant d'allonger ou de diminuer à volonté la portion vibrante de l'anche. L'*anche libre* diffère de l'anche battante en ce qu'elle ne ferme pas complètement la cavité rectangulaire ménagée pour la recevoir; elle produit un son moins désagréable. Battante ou libre, elle s'adapte sur un tuyau nommé *porte-vent*, qu'elle ferme de telle sorte, que l'air fourni par une soufflerie ne peut s'échapper du porte-vent qu'en soulevant l'anche; celle-ci retombe en vertu de son élasticité et continue à vibrer aussi longtemps qu'on maintient le courant d'air. Au-dessus de l'anche on dispose un tuyau, le plus souvent de forme conique, qui est le tuyau sonore proprement dit (*fig. 35*).

Si l'on isole l'anche et qu'on l'excite au moyen de l'archet, elle rend, en vertu de son élasticité, un son très faible, à peine perceptible. Il n'en est pas de même si on la fait vibrer par un courant d'air énergique; le son est alors produit, ainsi que dans la sirène, par les intermittences du courant d'air; le rôle de l'anche n'est que d'en régler la période d'après les lois de son élasticité. La hauteur du son reste donc la même, mais son intensité est beaucoup augmentée.

Le tuyau supérieur, pourvu qu'il puisse vibrer à l'unisson de

Fig. 35.



l'anche, renforce encore le son obtenu. Grâce à ses dimensions et à la vitesse considérable de la colonne d'air vibrante, le tuyau peut aussi forcer les vibrations de l'anche, c'est-à-dire que, s'il n'a pas la longueur convenable, l'anche cesse de vibrer en vertu de sa seule élasticité et prend une nouvelle période qui correspond au son forcé produit. Ce dernier cas se présente toujours dans les instruments à anche, tels qu'un seul tuyau doit rendre à volonté une série de sons différents, en général beaucoup plus graves que le son fondamental de l'anche (clarinette, hautbois, etc.).

La théorie des tuyaux à anche a été établie par M. Helmholtz (¹). Il a montré que la tranche du tuyau correspondant à la lame vibrante doit être considérée comme un nœud, ce que l'on concevra facilement, puisque les variations de la pression sont maximum au point par où s'introduisent les bouffées d'air successives, c'est-à-dire immédiatement au delà de l'anche. Ainsi, un tuyau muni d'une anche à l'une de ses extrémités équivaut, soit pour la production du son fondamental ou des harmoniques, à un tuyau fermé de même longueur. Un tuyau cylindrique à anche, la clarinette par exemple, ne peut donc produire que les harmoniques impairs du son fondamental. Pour calculer celui-ci, il faut, comme pour les tuyaux fermés ordinaires, altérer la longueur réelle par une correction additive correspondant à l'effet perturbateur de l'orifice et que l'on peut déterminer par l'expérience.

TUYAUX CONIQUES. — La théorie des tuyaux sonores développée ci-dessus n'est applicable qu'aux tuyaux cylindriques étroits; mais l'analyse permet de déterminer les sons rendus par des tubes de forme plus compliquée. Les seuls usités en Musique sont des tubes droits ou courbes qui vont en s'évasant de leur embouchure très étroite à leur orifice largement ouvert. Leur théorie doit se rapprocher énormément de celle de tubes coniques ayant pour base l'orifice et pour sommet l'embouchure.

Le cas le plus intéressant est celui où ces tuyaux sont munis

(¹) HELMHOLTZ, *Journal de Crelle*, t. LVII.

d'une embouchure à anche, formée, soit comme celle du hautbois, de deux petites lames élastiques très rapprochées, ou comme celle des instruments en cuivre d'un entonnoir (*fig. 36*) où l'on applique les lèvres; dans ce dernier cas, la pression de l'air, venu des poumons écarte les lèvres; dès qu'une petite quantité d'air est sortie, elles se rejoignent et produisent ainsi une série d'impulsions analogues à celle que l'on obtient au moyen des anches ordinaires.

Ainsi que nous l'avons établi à propos des tuyaux cylindriques, le point où se trouve l'anche doit être considéré comme un nœud. La théorie établit que le nombre de vibrations du son fondamental et de ses harmoniques est à peu près le même que pour un tuyau cylindrique de même longueur ouvert à ses deux extrémités; de sorte que le son fondamental est accompagné de tous ses harmoniques pairs ou impairs. Prenons pour exemple le cor de chasse. Les tuyaux très longs ne rendent guère que des harmoniques élevés du son fondamental, surtout quand ils sont enroulés sur eux-mêmes; le cor rend les harmoniques

Fig. 36.



8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16,

dont les rapports sont

1, $\frac{9}{8}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{11}{8}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{13}{8}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{15}{8}$, 16.

Ces rapports expriment les notes

ut, *ré*, *mi*, — *sol*, — — *si*, *ut*₂.

Ce sont les notes de la gamme, à l'exception de trois sons; mais on peut modifier ceux-ci, comme on le fait dans le cor d'harmonie, en introduisant le poing dans le pavillon, ce qui a pour effet d'abaisser un peu le son.

INSTRUMENTS A VENTS. — La production des divers harmoniques obtenus en modifiant la pression des lèvres ou la force du vent n'est pas la seule ressource que possède le musicien pour faire varier le son produit par un tuyau.

Le trombone et le cornet à piston ont une longueur que l'on fait varier soit par une coulisse, soit par des tubes supplémentaires que le jeu des pistons introduit à volonté dans le circuit total. Enfin, tous les autres instruments sont percés de trous latéraux que l'on peut ouvrir ou fermer avec les doigts ou avec des clefs, et dont le rôle est facile à comprendre; car, quand on ouvre le tuyau en un point déterminé, on met ce point en communication avec l'air extérieur, et l'on y détermine des phénomènes analogues à ceux qui se produisent à l'extrémité ouverte et que nous avons étudiés ci-dessus.

De là résulte que, si un instrument comme la flûte, qui a pour son fondamental un $ré$, porte six trous échelonnés convenablement de l'extrémité à l'embouchure, on produira, en les ouvrant successivement, un effet voisin de celui que l'on obtiendrait si l'on coupait successivement le tuyau en ces divers trous, et alors il rendra les sons ascendants $ré$, mi , fa , sol , la , si , ut_2 . Après quoi, si l'on rebouche tous ces orifices et qu'on modifie le courant d'air, on fera sortir le premier harmonique $ré_2$, et, en recommençant à déboucher successivement les trous, on obtiendra la deuxième gamme commençant à $ré_2$. Pour compléter la série des notes, il n'y a plus qu'à ajouter des clefs intermédiaires qui produiront les dièses et les bémols. Tous les autres instruments à vent sont disposés d'une manière analogue.

VIBRATIONS LONGITUDINALES DES LIQUIDES ET DES SOLIDES.

Les lois de la propagation et de la réflexion dans un cylindre limité s'appliquent indifféremment au cas où le cylindre est gazeux, liquide ou solide. Nous allons retrouver dans les vibrations longitudinales des liquides et des solides toutes les circonstances que les tuyaux sonores nous ont offertes.

LIQUIDES. — Quand on plonge un tuyau à embouchure de flûte dans un liquide quelconque et qu'on y injecte un courant de ce même liquide, il obéit aux mêmes lois que dans l'air et se divise de la même manière en ventres séparés par des

nœuds. Il n'y a rien de changé que la vitesse du son V , qui prend des valeurs différentes quand le fluide change, et les harmoniques successifs sont toujours donnés, si le tuyau est bouché, par

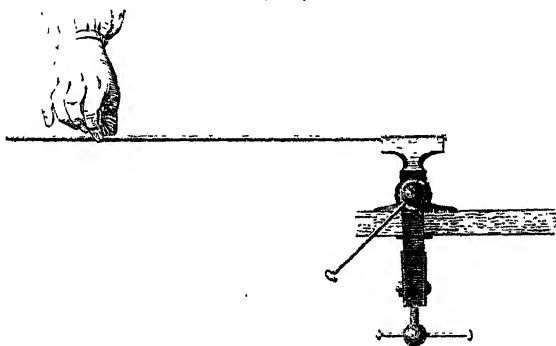
$$N = \frac{(2n-1)V}{4L},$$

et, s'il est ouvert, par

$$N' = \frac{nV}{2L}.$$

SOLIDES. — La théorie reste encore la même quand on fait vibrer longitudinalement des verges rigides prismatiques de métal, de bois et de verre, ou des cordes flexibles tendues. Pour les mettre en mouvement, il suffit de les frotter légèrement dans le sens de la longueur avec les doigts imprégnés de colophane, et, si l'on emploie du verre, avec une étoffe mouillée (fig. 37). Les sons que l'on produit ainsi sont très purs,

Fig. 37.



ordinairement fort doux et toujours plus élevés que si les mêmes appareils vibraient transversalement. On détermine les divers harmoniques en touchant légèrement l'un des points où doit se former un nœud. Il peut se présenter trois cas :

1° La tige est encastrée par un bout.

Ce cas est identique à celui des tuyaux fermés (fig. 37). Les harmoniques sont

$$N = \frac{(2n-1)V}{4L}.$$

2° Les deux bouts sont libres.

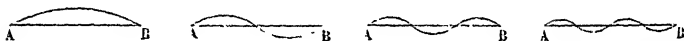
La division de la tige se fait comme dans les tuyaux ouverts. On a

$$N' = \frac{nV}{2L}.$$

3° Les deux bouts sont fixés.

Dans ce cas, qui est celui des cordes tendues, la réflexion se fait avec changement de signe à chaque extrémité qui devient un nœud, et la corde peut se diviser en 1, 2, 3, 4, ... longueurs d'ondes, comme le représente la *fig.* 38.

Fig. 38.



Les harmoniques correspondants sont

$$\frac{V}{2L}, \quad \frac{2V}{2L}, \quad \frac{3V}{2L}, \quad \frac{4V}{2L}, \quad \dots, \quad \frac{nV}{2L}.$$

On voit qu'ils sont les mêmes que dans le second cas.

Nous devons dire, en terminant, que l'expérience fait reconnaître certaines perturbations dans les lois précédentes; les nœuds extrêmes sont toujours plus rapprochés des bouts que la théorie ne l'indique; mais, quand on fait naître des harmoniques élevés, les internœuds qui se trouvent vers le milieu ont exactement la longueur indiquée par les formules précédentes. Les perturbations n'affectent donc que les extrémités.

Les vibrations longitudinales des solides peuvent avoir une amplitude assez grande. Savart ⁽¹⁾, ayant fixé dans un étai une tige de laiton de 1^m,4 de longueur et de 0^m,035 de diamètre, plaçait vis-à-vis de son extrémité la pointe d'un sphéromètre qu'elle ne touchait pas pendant le repos, mais qu'elle venait frapper périodiquement à chaque oscillation. Ces chocs s'entendaient encore quand la distance du sphéromètre était égale à 0^m,0006, et, par conséquent, l'amplitude des oscilla-

(1) F. SAVART, *Mémoire sur les vibrations des corps solides* (*Annales de Chimie et de Physique*, 2^e série, t. XXV, p. 12, 138 et 225; 1824).

tions était au moins double de cette quantité. Il aurait fallu un poids de 1700^{ks} pour déterminer cet allongement. Cela montre que, pendant ces vibrations longitudinales, une corde est soumise à des tractions qui s'ajoutent au poids qu'elle porte, et l'on conçoit que les deux actions réunies puissent dépasser les limites d'élasticité. Aussi, lors même que ce poids tenseur est beaucoup trop faible pour lui donner un allongement permanent, la corde s'allonge très rapidement quand on la fait vibrer et finit toujours par se briser. Il en résulte qu'on doit éviter avec le plus grand soin de faire osciller régulièrement les chaînes des ponts suspendus.

CHAPITRE III.

VIBRATIONS TRANSVERSALES.

Corde illimitée. — Corde limitée. — Sonomètre. — Lois des vibrations transversales des cordes. — Rapport des vibrations longitudinales et transversales. — Influence de la rigidité. — Vibrations transversales des verges. — Diapason. — Vibrations engendrées par la torsion.

CORDE ILLIMITÉE. — Nous avons supposé jusqu'à présent que les vibrations étaient dirigées dans le sens du cylindre qui les propage; mais, dans le cas des solides, elles peuvent être normales à l'axe de ce cylindre, c'est-à-dire *transversales*.

Imaginons une corde tendue AB, et supposons que l'on soulève successivement le point A en $\alpha, \alpha', \dots, A'$ (*fig. 31*).

A cause de la solidarité qui existe entre deux molécules voisines A et D, le point D s'élèvera lui-même en $\delta, \delta', \dots, D'$, et il en sera de même des points suivants. Mais toute transmission de mouvement exigeant du temps pour s'effectuer, la molécule D sera en δ quand A sera en α' , et en D' quand A sera redescendu de A' en α' ; en un mot, la vibration transversale de A se transmet le long de AB avec une vitesse de propagation V' ,

qui n'est pas la même que celle des vibrations longitudinales. Cherchons, en effet, la loi de ces nouvelles vibrations. Soit \mathcal{C} la tension de la corde au point A (*fig. 40*), laquelle est sensible-

Fig. 39.

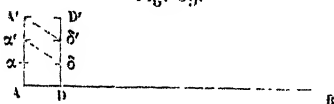
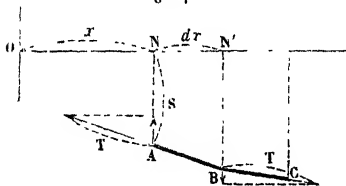


Fig. 40



ment invariable en grandeur, mais change de direction d'un point à un autre de la corde.

La tension \mathfrak{C} s'exerce en A dans le sens de l'élément de corde AB; sa composante normale, dirigée suivant AN, est, en désignant par x l'élongation AN du point A,

$$\mathfrak{C} \frac{\partial s}{\partial x},$$

et est dirigée vers N. De même en B, la tension est dirigée suivant BC, et sa composante normale, dirigée en sens inverse de BN', est

$$\mathfrak{C} \frac{\partial (s + ds)}{\partial x},$$

puisque nous faisons abstraction de la variation de \mathfrak{C} . La résultante de ces deux forces normales est une force

$$\mathfrak{C} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} dx,$$

appliquée à l'élément AB et tendant à le ramener vers sa position d'équilibre.

D'autre part, et si l'on désigne par δ la masse de l'unité de longueur de la corde, la force motrice a pour expression

$$\delta \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} dx.$$

L'équation du mouvement est donc

$$\delta \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \mathfrak{C} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

ou, par abréviation,

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = V'^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2},$$

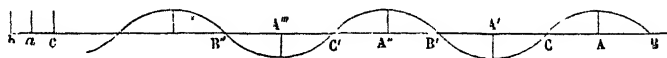
laquelle ne diffère de l'équation qui se rapporte aux vibrations longitudinales que par la valeur de la constante $V'^2 = \frac{\mathfrak{C}}{\delta}$, qui figure dans le second membre.

Si l'on suppose que l'un des points de la corde exécute une

vibration harmonique, tous les autres points exécutent aussi des vibrations harmoniques.

Comme précédemment, si l'on suppose la corde AB indéfinie, on pourra représenter le lieu occupé par les divers points au même moment par la courbe sinusoïdale suivante (fig. 41).

Fig. 41.



Les distances BB' , $B'B''$, ..., entre deux nœuds semblables, seront égales à la longueur d'onde λ , et, en désignant par T la durée d'une vibration complète, on aura

$$\lambda = V'T.$$

Si l'on représente par N le nombre de vibrations effectuées en une seconde, on pourra remplacer T par $\frac{1}{N}$, ce qui donne

$$V' = N\lambda.$$

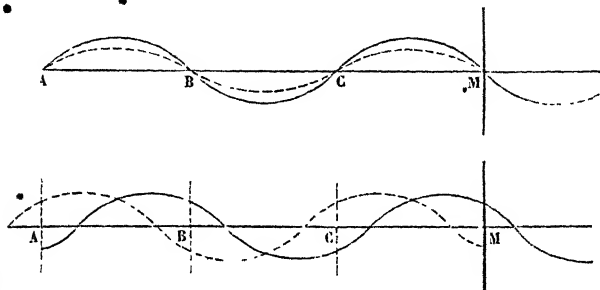
On peut réaliser le genre de mouvement que nous venons d'étudier en tendant horizontalement un tube de caoutchouc très long et en agitant à la main un de ses bouts. Si on le soulève et qu'on l'abaisse alternativement, on voit des ondes se former et se succéder; elles reproduisent la fig. 41 et se propagent avec une vitesse peu considérable. On peut opérer de la même manière avec une longue corde déposée sur le sol.

On obtiendra une seconde représentation figurative de ce genre de mouvement en remplissant d'eau une auge en zinc très longue et très étroite, et en agitant le liquide à l'une des extrémités par un solide qu'on plonge et qu'on soulève alternativement. On fait naître ainsi des dépressions et des surélévations du niveau qui se propagent avec la même vitesse et réalisent à la surface liquide la courbe de la fig. 41.

CORDE LIMITÉE. — Si la file des molécules considérées est limitée en M (fig. 42), elle devient le siège de phénomènes analogues à ceux qui ont été étudiés déjà pour les vibrations longitudinales dans les cylindres de longueur finie. Les mou-

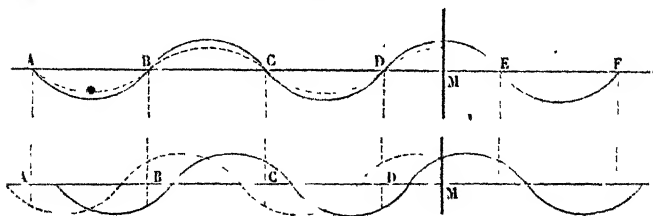
vibrations incidentes se réfléchissent de l'extrémité M vers la partie antérieure de deux manières : 1° avec changement de signe des vitesses vibratoires, si M est invariablement fixé.

Fig. 42.



Dans ce cas, les vitesses des ondes incidente et réfléchiée sont représentées par les ordonnées des courbes pleines et ponctuées (*fig. 42*) : il y a des nœuds fixes à partir de M à toutes les distances multiples de $\frac{1}{2}\lambda$. 2° Les ondes se réfléchiront sans changement de signe si M est libre dans l'air : alors les ondes incidentes et réfléchies auront des vitesses représentées *fig. 43*. Elles s'ajouteront ou se retrancheront ; M sera un

Fig. 43.



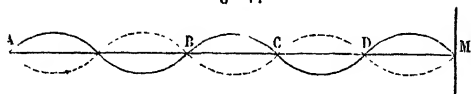
ventre, et les nœuds seront à des distances de M égales à des multiples impairs de $\frac{\lambda}{4}$.

Dans les deux cas, les vitesses seront contraires, au même moment, dans deux ventres consécutifs, tantôt positives, tantôt

négatives, et les nœuds formeront des séparations immobiles entre ces concamérations de vitesses égales et contraires.

Pour donner l'idée de ce mouvement, prenons d'une main l'extrémité A d'un long tube de caoutchouc fixé en M (fig. 44);

Fig. 44.



en soulevant et en abaissant rapidement A, nous ferons naître une série d'ondes incidentes qui se propageront jusqu'en M, s'y réfléchiront, reviendront en A, où elles se réfléchiront de nouveau, et ainsi de suite. Nous déterminerons ainsi des nœuds fixes également espacés en M, D, C, B, ..., et enfin un dernier dans le voisinage de A, et qui se confondra avec ce point A si la longueur AM se partage en un nombre entier d'internœuds ou de demi-longueurs d'onde. Quand cette condition est réalisée, les mouvements réfléchis sont, en chaque nœud, égaux et contraires aux mouvements directs; ils sont toujours de même signe et toujours concordants dans les ventres; le tube vibre régulièrement, prenant alternativement la forme de la courbe pleine ou de la courbe ponctuée, et le mouvement persiste, pourvu qu'on l'entretienne par de petites impulsions synchrones imprimées en A.

La longueur L du tube de caoutchouc sera partagée en n intervalles égaux à $\frac{\lambda}{2}$,

$$L = n \frac{\lambda}{2} = \frac{n}{2} \frac{V'}{N},$$

d'où

$$N = \frac{n}{2} \frac{V'}{L}.$$

En donnant au tube de caoutchouc des impulsions suffisamment lentes et telles que $n = 1$, il n'y a pas de nœuds entre A et X; la corde vibre dans sa totalité et prend alternativement les formes AaX et AbX (fig. 45).

Si l'on précipite ou qu'on ralentisse la mesure du mouve-

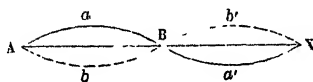
ment d'impulsion, l'oscillation du caoutchouc devient irrégulière et discontinue. Quand elle est deux fois plus rapide, la

Fig. 45.



régularité se rétablit; on voit se produire un nœud au milieu B (*fig. 46*), qui demeure immobile pendant que la forme

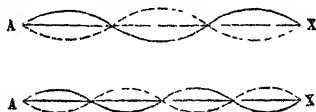
Fig. 46.



générale de la courbe passe alternativement de $AaBa'X$ à $AbBb'X$.

Si l'on agite le tube trois, quatre, cinq, ... fois plus vite, les nœuds se fixent de même, et il y en a deux, trois, quatre, ..., comme le représente la *fig. 47*.

Fig. 47.

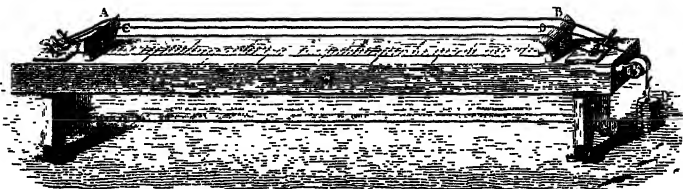


A mesure qu'on diminue la longueur du tube de caoutchouc ou qu'on augmente sa tension, le rythme s'accélère. Enfin, quand on emploie des cordes métalliques, le mode de mouvement reste absolument le même; mais le nombre des vibrations devient beaucoup plus considérable, et il peut être suffisant pour produire un son perceptible.

SONOMÈTRE. — Quand on veut faire vibrer les cordes de musique, on les tend sur un sonomètre. C'est un instrument composé d'une caisse vide en sapin M (*fig. 48*), qui est destinée à la fois à les supporter et à renforcer leur son. On accroche une

de leurs extrémités à une broche en fer, et, pour leur donner une tension convenable, on les enroule par l'autre bout sur le contour d'une vis implantée dans la table et qu'on tourne plus ou moins, ou bien on les fait passer sur la gorge d'une poulie et on les charge par un poids P. Elles s'appuient sur deux chevalets A et B, à arêtes vives, qui ne changent point leur tension longitudinale, mais qui les fixent transversalement;

Fig. 48.

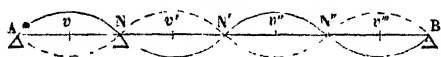


dès lors elles vibrent comme si leur longueur totale était égale à la distance des points d'appui, distance qui est ordinairement égale à 1^m et qui est donnée par une division tracée sur la table. On met ces cordes en vibration, soit en les frappant avec un petit marteau de bois garni de peau, soit en les pinçant avec les doigts pour les écarter de leur équilibre, soit enfin en les frottant avec un archet.

Le son fondamental, celui qui résulte d'une vibration de totalité, s'obtient spontanément. Pour faire sortir les autres, il suffit de fixer, par une pression légère, un des points qui doit être un nœud, et d'ébranler avec l'archet une partie qui doit devenir un ventre : la décomposition en parties aliquotes se produit à l'instant, et, une fois qu'elle est commencée, on peut cesser de presser le nœud qui a été fixé et continuer le mouvement de l'archet sans que le son change. Par exemple, fixons le point N (fig. 49), qui est au quart de la longueur totale; et, pour rendre sensible aux yeux la division de la corde, mettons des chevalets de papier aux points N' et N'' qui doivent être des nœuds, et d'autres chevalets semblables au milieu des ventres ν' , ν'' , ν''' . Aussitôt que nous donnerons un coup d'archet en ν , tous les derniers seront chassés au loin par le mouvement de ν' , ν'' , ν''' , mais les premiers resteront à

leur place, puisque les nœuds N' , N'' sont immobiles. On peut encore, comme le faisait Savart, disposer sur une planche noircie une longue corde peu tendue, recouverte de fils ar-

Fig. 49.



gentés. Pendant qu'elle vibre, elle se détache en blanc sur le fond, et l'œil, saisissant l'enveloppe de ses positions extrêmes, voit les ventres renflés et les nœuds réduits à l'épaisseur de la corde.

La formule $N = \frac{2V'}{2L}$ montre que, si la corde se divise en 1, 2, 3, ... internœuds, N est toujours proportionnel à leur nombre et que les harmoniques de la corde suivent la série des nombres naturels. Pour vérifier ce résultat, il faut mettre le chevalet additionnel N au milieu, au tiers ou au quart de la corde, et l'on trouve alors que, si ut_1 est la note fondamentale, la série des harmoniques est

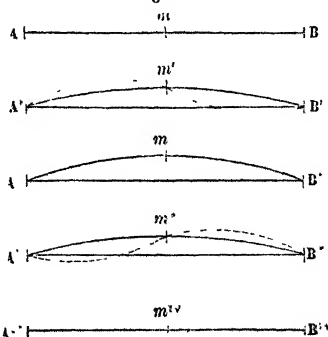
$$ut_1, ut_2, sol_2, ut_3, mi_3, sol_3, \dots,$$

notes qui sont représentées par la série naturelle des nombres

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

Le calcul indique encore un résultat curieux que nous généraliserons par la suite; c'est que, quand un point de la corde est ébranlé périodiquement, d'après une loi quelconque, chacun de ces états vibratoires différents, constitués et par les mouvements d'ensemble de la corde entière et par celui de ses parties aliquotes, doivent se produire, non seulement séparément, mais encore simultanément. Par conséquent tous les sons harmoniques 1, 2, 3, 4, ... doivent être super-

Fig. 50.



posés quand la corde résonne. C'est, en effet, ce que l'oreille saisit avec un peu d'exercice.

On peut se représenter par une construction graphique le mouvement complexe que la corde effectue (*fig. 50*). Supposons, par exemple, qu'elle vibre en totalité : elle prendra à partir de sa position d'équilibre, après des temps égaux à un quart de vibration, les formes AmB , $A'm'B'$, ..., $A^n m^n B^n$. Mais, pour donner l'harmonique 2, chacune des moitiés vibrera par rapport à la totalité ; elle effectuera une demi-vibration pendant chaque quart de l'oscillation totale, et la corde prendra successivement les contours ponctués représentés dans la figure. Le sonomètre noirci de Savart fait voir très nettement l'enveloppe de ces courbes. On se rendrait compte de la même manière de la production des autres harmoniques 3, 4, 5,

LOIS DES VIBRATIONS TRANSVERSALES DES CORDES. — La formule $N = \frac{V'}{2L}$ fera connaître le nombre de vibrations quand on aura déterminé la vitesse V' de propagation des vibrations transversales. A la vérité, on n'a pas pu mesurer V' directement ; mais observons que, dans la formule (1), on a $V'^2 = \frac{\tau}{\delta}$; la masse δ de l'unité de longueur de la corde est, en désignant par d sa densité,

$$\delta = sd ;$$

d'ailleurs, la corde est, en général, tendue par un poids connu P , $\tau = Pg$ dynes ; on a donc

$$V' = \sqrt{\frac{gP}{sd}},$$

d'où

$$(1) \quad N = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{gP}{sd}}.$$

De cette formule dérivent les quatre lois suivantes, que nous allons vérifier expérimentalement :

1° *Le nombre des vibrations est en raison inverse de la longueur de la corde.*

Plaçons sous l'une des cordes du sonomètre un chevalet supplémentaire, et faisons-le glisser de manière que la longueur de la partie vibrante devienne

$$1, \frac{8}{9}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{8}{15}, \frac{1}{2},$$

cette partie rendra les notes de la gamme

$$ut, ré, mi, fa, sol, la, si, ut_2;$$

et, par conséquent, les nombres de vibrations sont égaux à

$$1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8}, 2,$$

C'est-à-dire en raison inverse de la longueur.

2° *Le nombre de vibrations est en raison inverse du rayon.*

On place successivement en CD (fig. 48) quatre cordes de même substance tendues par le même poids P, et dont les rayons varient comme les nombres 4, 3, 2, 1. En les comparant à une autre corde AB dont la tension demeure constante, on trouve qu'elles produisent les notes

$$ut_1, fa_1, ut_2, ut_3;$$

par conséquent, leurs nombres de vibrations sont

$$1, \frac{4}{3}, 2, 4,$$

ou

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1,$$

c'est-à-dire en raison inverse des rayons.

3° *Le nombre des vibrations est proportionnel à la racine carrée du poids tenseur.*

Après avoir mis la corde d'essai CD tendue par un poids que nous prendrons comme égal à l'unité, à l'unisson d'une corde étalon AB, nous la chargerons par d'autres poids, 4, 9, 16, ..., et, en comparant le son qu'elle donne avec celui de la corde

fixe, nous verrons que, pour les quatre valeurs de P

$$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16,$$

elle rend les sons

$$ut_1, \quad ut_2, \quad sol_2, \quad ut_3,$$

qui correspondent aux nombres de vibrations

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4,$$

proportionnels à la racine de P.

4° *Le nombre des vibrations est en raison inverse de la racine carrée de la densité.*

On tendra deux cordes de même section et de nature différente avec les mêmes poids P, et l'on cherchera les longueurs l et l' qu'il faut leur donner pour qu'elles soient à l'unisson; on trouvera que $\frac{l}{l'} = \sqrt{\frac{d}{d'}}$; et, comme les nombres de vibrations sont en raison inverse des longueurs, on aura

$$\frac{N'}{N} = \sqrt{\frac{d}{d'}},$$

ce qui justifie la loi énoncée.

Une fois que l'on connaît la loi des cordes, on peut se servir du sonomètre pour déterminer le nombre de vibrations effectuées pendant une seconde par un son quelconque. Supposons, par exemple, que la longueur initiale de la corde du sonomètre soit égale à 1^m et qu'on l'ait tendue jusqu'à la mettre à l'unisson avec le diapason; alors elle fait 435 vibrations par seconde; mais, en l'allongeant ou en la raccourcissant jusqu'à une longueur l , on pourra lui faire rendre le son que l'on veut apprécier, et ce son correspondra à $\frac{435}{l}$ vibrations par seconde.

Ce procédé, imaginé par Mersenne (1), est souvent employé pour évaluer la hauteur des sons.

RAPPORT DES VIBRATIONS LONGITUDINALES ET TRANSVERSALES. — Lorsqu'une corde vibre longitudinalement ou transversale-

(1) MERSENNE, *Harmonie universelle*, Paris, 1636.

ment, on a

$$N = \frac{V}{2L} \quad \text{ou} \quad N' = \frac{V'}{2L};$$

par conséquent, les nombres N et N' sont dans les rapports des vitesses V et V' . Or nous avons vu (p. 72) que $V' = \sqrt{\frac{g'P}{sd}}$,

et nous montrerons bientôt que la formule de la vitesse V se réduit très sensiblement, dans le cas des solides, à $V = \sqrt{\frac{g}{\epsilon}}$;

ϵ est l'allongement qu'éprouve une corde de longueur égale à l'unité quand elle est tendue par le poids d'une masse égale à la sienne, c'est-à-dire à sd ; P produit un allongement η , et l'on a proportionnellement

$$\frac{\eta}{\epsilon} = \frac{P}{sd};$$

par conséquent

$$\frac{N'}{N} = \sqrt{\eta};$$

le rapport du nombre des vibrations transversales et longitudinales est donc égal à la racine carrée de l'allongement que l'unité de longueur de la corde éprouve par la tension due au poids P qu'elle supporte. N , N' , η , V et V' sont donc liés par trois relations simples qui permettent de calculer trois de ces quantités quand on connaît les deux autres.

INFLUENCE DE LA RIGIDITÉ. — Quand les expériences sont faites avec beaucoup de soin, on trouve toujours, entre le calcul et l'observation, une divergence notable : elle est d'autant plus grande que le diamètre augmente davantage ; et, lorsque le diamètre décroît, la hauteur du son s'élève moins rapidement que la raison inverse de cette longueur. Cela tient à ce qu'il y a dans ces épreuves de vérification deux causes d'erreurs inévitables. D'abord il est évident que les points d'appui ne sont pas absolument fixes ; en second lieu, la théorie suppose que les cordes sont parfaitement flexibles, tandis qu'en réalité celles que l'on étudie ont un certain degré de rigidité.

N. Savart ⁽¹⁾ a détruit la première cause d'erreur en encastrant les cordes dans des étaux très lourds garnis de plomb; alors il ne restait plus que les divergences occasionnées par la rigidité, et il les a étudiées par les expériences suivantes. Il tendait verticalement la corde par un poids P qu'il augmentait progressivement, puis il en fixait une partie entre deux étaux solidaires l'un de l'autre et séparés par un intervalle invariable de 0^m,080. La corde avait donc une tension variable P , et la formule des vibrations donnait $n = \sqrt{AP}$, en désignant par A une constante.

On faisait vibrer cette corde et, en comparant sa note à celle d'un violon accordé sur un diapason connu, on déterminait le nombre N de vibrations qu'elle faisait réellement. N fut toujours plus grand que n , et la différence entre N^2 et n^2 fut trouvée constante,

$$N^2 - n^2 = C.$$

Posons $C = AP_1$: nous pourrions écrire

$$N^2 = AP + AP_1, \quad N = \sqrt{A(P + P_1)},$$

ce qui veut dire que la rigidité d'une corde produit le même effet que si sa tension était augmentée d'une quantité constante P_1 .

VIBRATIONS TRANSVERSALES DES VERGES. — A mesure que la rigidité des cordes augmente, les lois de leurs vibrations changent progressivement jusqu'à une limite qui est atteinte quand on emploie des verges métalliques qui n'ont plus de flexibilité. La théorie de ces vibrations a été établie par Poisson ⁽²⁾ et par Cauchy ⁽³⁾ et perfectionnée par Seebeck ⁽⁴⁾.

La formule obtenue n'a plus aucun rapport avec celle que nous avons trouvée pour les cordes. Lorsqu'il s'agit de verges

⁽¹⁾ N. SAVART, *Annales de Chimie et de Physique*, 3^e série, t. VI, p. 5; 1846.

⁽²⁾ POISSON, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VIII, p. 484.

⁽³⁾ CAUCHY, *Exercices de Mathématiques*, t. III, p. 270.

⁽⁴⁾ SEEBECK, *Dove's Repertorium*, t. VIII, p. 46.

prismatiques de longueur l et d'épaisseur e , le nombre N des vibrations est

$$N = A \frac{e}{l^2}.$$

A est un coefficient constant. On voit que N est :

- 1° Indépendant de la largeur des verges ;
- 2° Proportionnel à leur épaisseur ;
- 3° En raison inverse du carré de leur longueur.

Toutes ces lois sont vérifiées par l'expérience.

La même formule s'applique d'ailleurs aux verges cylindriques, en remplaçant e par $r\sqrt{3}$, c'est-à-dire par le côté du triangle inscrit dans la section circulaire.

Nous allons maintenant examiner en détail comment ces verges se subdivisent en concamérations séparées par des nœuds, et quels harmoniques ils produisent. Cette question est fort complexe. Il faut commencer par distinguer plusieurs cas, suivant que la verge encastrée ou simplement appuyée aura :

- 1° Les deux extrémités appuyées ;
- 2° Les deux extrémités fixées dans un étau ;
- 3° Les deux extrémités libres ;
- 4° Un bout appuyé, l'autre fixé ;
- 5° Un bout appuyé, l'autre libre ;
- 6° Un bout fixé, l'autre libre.

1° *Les deux extrémités appuyées.* — La verge peut vibrer en totalité ou se diviser en concamérations. Dans ce cas, il y a n nœuds équidistants dont les extrêmes occupent les deux bouts (fig. 51). Les internœuds sont tous égaux entre eux et

à $\frac{l}{n-1}$, et, chacun d'eux vibrant comme une verge séparée,

les sons harmoniques sont en raison inverse du carré de $\frac{l}{n-1}$, et, par suite, proportionnels au carré des nombres

$$1, 2, 3, 4, \dots, n-1,$$

quand le nombre total des nœuds est

$$2, 3, 4, 5, \dots, n.$$

Le son fondamental est, dans ce cas,

$$N_1 = \frac{\pi V}{4\sqrt{3}} \frac{e}{l^2},$$

en désignant par V la vitesse de propagation des vibrations *longitudinales*. Les harmoniques suivants sont $4N_1, 9N_1, \dots$

2° *Les deux extrémités fixées*. — Si, au lieu d'appuyer seulement les extrémités sur des supports fixes, on les serre dans des étaux ou qu'on les encastre en les soudant dans des masses métalliques, les phénomènes ne restent pas les mêmes. Les nœuds A' et B' , voisins des extrémités, s'en rapprochent (fig. 51). Dans le cas où ces nœuds sont au moins au nombre

Fig. 51.



de 5, les distances AA' et BB' sont $\frac{5l}{2(2n-1)}$, et tous les autres internœuds sont égaux entre eux et à $\frac{2l}{2n-1} = D$. De plus, les harmoniques produits sont réciproques aux carrés de D ou proportionnels aux carrés de

$$3, 5, 7, 9, \dots, 2n-1,$$

quand le nombre total des nœuds est

$$2, 3, 4, 5, \dots, n.$$

Le son fondamental est $N_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 N_1$; les harmoniques se trouvent en remplaçant 3 par 5, 7, 9, ...

3° *Les deux extrémités libres*. — On réalise ce cas en appuyant la règle sur des supports de liège en des points où doivent se produire des nœuds. Il y a deux ventres aux deux extrémités; mais les concamérations du milieu restent les mêmes que dans le cas précédent. Le seul changement qui se fasse est que les nœuds A et B , qui étaient aux extrémités,

s'en éloignent pour venir se placer en α et β . On a

$$A\alpha = B\beta = \frac{2l}{2n-1} (0,330), \quad AA' = BB' = \frac{5l}{2(2n-1)},$$

$$A'A'' = A''A''' = \dots = D = \frac{2l}{2n-1}.$$

Les sons restent les mêmes que précédemment.

4° *Un bout appuyé B, l'autre fixé A.* — Puisque, les deux bouts étant appuyés, la verge se divise en internœuds égaux entre eux, il est évident que, dans le cas qui nous occupe maintenant, le nœud B', qui avoisine l'extrémité appuyée B, sera dans les mêmes conditions que ceux du milieu et que les vibrations se feront comme si la verge était doublée et que les deux bouts fussent fixés. Alors le nombre des nœuds serait $2n-1$, la longueur $2l$, et, en remplaçant dans les équations qui conviennent au deuxième cas n par $2n-1$, l par $2l$, on aura

$$AA' = \frac{5l}{4n-3}, \quad A'A'' = A''A''' = \dots = D = \frac{4l}{4n-3}.$$

L'expérience et le calcul prouvent, en outre, que le nombre n des nœuds, y compris ceux des extrémités, étant

$$2, 3, 4, 5, 6,$$

les sons se représentent par la série des carrés de $\frac{1}{D}$, ou par les carrés de

$$5, 9, 13, \dots, 4n-3.$$

Le son fondamental devient $N_1 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 N_1$; on obtient les harmoniques en remplaçant 5 par 9, 13,

5° *Un bout appuyé B, l'autre libre A.* — La verge peut se remplacer de même par une autre de longueur double $2l$, libre à ses deux bouts et ayant $2n-1$ nœuds. Ce cas ne différera du précédent que parce que le nœud A quittera l'extré-

mité pour se placer en α . On aura

$$\Lambda \alpha = \frac{4l}{4n-3} (0,330), \quad \Lambda \Lambda' = \frac{5l}{4n-3},$$

$$\Lambda' \Lambda'' = \Lambda'' \Lambda''' = \dots = D = \frac{4l}{4n-3};$$

et, le nombre des nœuds pouvant être

$$2, 3, 4, \dots, n,$$

les harmoniques seront exprimés par le carré de

$$5, 9, \dots, 4n-3.$$

Les notes sont les mêmes que dans le cas précédent.

6° *Un bout fixé B, l'autre libre A.* — Il y aura un ventre en A, un nœud en α et un autre en B. La verge présentera à ses deux bouts les caractères qui répondent aux cas où ils sont fixés et libres,

$$\Lambda \alpha = \frac{2l}{2n-1} (0,330), \quad \Lambda \Lambda' = BB' = \frac{5l}{2(2n-1)},$$

$$\Lambda' \Lambda'' = \dots = D = \frac{2l}{2n-1}.$$

Le nombre des nœuds étant

$$1, 2, 3, 4, \dots, n,$$

les sons produits seront le premier $N_6 = (0,6)^2 N_1$, et les suivants $\left(\frac{3}{2}\right)^2 N_1, \left(\frac{5}{2}\right)^2 N_1, \dots$. On pourra donc les représenter, à partir du second, par les carrés de

$$3, 5, \dots, 2n-1.$$

Le son fondamental et l'harmonique qui le suit sont dans le rapport de $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ et $\left(\frac{3}{2}\right)^2$, ou de 4 et 25.

DIAPASON. — Il n'entre point dans notre but de décrire les divers instruments à cordes et à verges; nous ne parlerons que

du diapason. Une verge rectiligne soutenue en n et n' donne le son fondamental. Quand on la courbe peu à peu, n et n' se rapprochent sans cependant se confondre tout à fait, et la note rendue s'abaisse. On peut alors soutenir l'appareil par une tige unique (fig. 52) qui est placée au milieu du ventre moyen. Ces verges en forme de fourchette s'appellent *diapason*; on peut les ébranler soit avec un archet qui frotte sur une seule branche, soit en les frappant contre un corps solidé, et elles rendent un son très fixe qui se continue pendant très longtemps, mais qui est très faible. Pour le renforcer, on les appuie par la tige sur une surface de bois, ou bien on les fixe sur des caisses de résonance (fig. 53). Ces caisses sont de véritables tuyaux ouverts à un

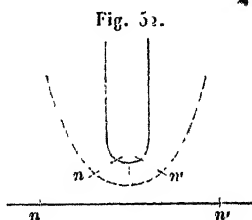
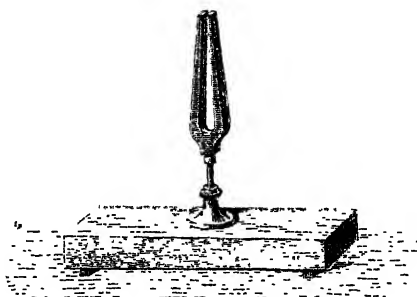


Fig. 53.



bout, fermés à l'autre, et de dimension telle, qu'ils reproduisent et renforcent le son du diapason; mais alors ce son dure moins longtemps.

VIBRATIONS ENGENDRÉES PAR LA TORSION. — Quand une barre cylindrique est fixée par une de ses extrémités, qu'on la tord par l'extrémité opposée et qu'on l'abandonne à elle-même, elle exécute de part et d'autre de sa position d'équilibre des oscillations pendulaires qui peuvent être assez rapides pour engendrer un son. Le mécanisme de leur propagation à l'intérieur de

la barre est le même que pour les vibrations longitudinales; mais la force accélératrice et, par suite, la vitesse de propagation et la hauteur du son rendu sont plus faibles.

On peut comparer expérimentalement le son rendu par une verge cylindrique fixée ou libre aux deux bouts, quand on la fait vibrer, soit longitudinalement, soit par la torsion. Cette étude a été faite par Chladni ⁽¹⁾, par Savart ⁽²⁾ et surtout par Wertheim ⁽³⁾. Son intérêt, très médiocre au point de vue de la musique, où les vibrations torsionnelles sont sans emploi, est tout entier dans la détermination du coefficient μ , qui désigne le rapport de la contraction transversale à l'allongement dans une barre que l'on étire ⁽⁴⁾ : on a, d'après Poisson ⁽⁵⁾, entre les nombres de vibrations longitudinales N' et torsionnelles N que peut exécuter une même barre, la relation

$$\frac{N'}{N} = \sqrt{2(1 + \mu)}.$$

Voici le résultat des expériences de Wertheim :

SUBSTANCES.	LONGUEUR.	RAYON.	N'.	N.	$\frac{N'}{N}$.	μ .
	m	mm				
Fer	2,061	8,220	1255,6	766,5	1,637	0,339
»	2,005	5,501	1267,3	771,1	1,643	0,349
Acier fondu.....	2,000	5,055	1286,4	787,7	1,633	0,333
Laiton.....	2,000	5,031	864,5	531,1	1,628	0,325

La valeur probable de μ est donc $\frac{1}{3}$, comme Wertheim l'a admis dans ses recherches sur l'élasticité.

(1) CHLADNI, *Acoustique*.

(2) SAVART, cité par POISSON, *Mémoires de l'Académie*, t. VIII, p. 456.

(3) WERTHEIM, *Annales de Chimie et de Physique*, 3^e série, t. L, p. 262; 1857.

(4) Voir tome I^{er}, 2^e fascicule, au Chapitre de l'Élasticité.

(5) POISSON, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VIII.

CHAPITRE IV.

DU MODE ET DE LA VITESSE DE PROPAGATION
DES VIBRATIONS DANS UN MILIEU INDÉFINI.

Vibrations longitudinales et transversales dans un milieu indéfini. — Vibrations des surfaces liquides. — Réflexion du son. — Échos. — Portevois. — Cornet acoustique. — Réfraction du son.

Vitesse du son. — Formules de Newton et de Laplace. — Formules générales relatives aux solides. — Mesure de la vitesse du son. — Vitesse du son dans l'air. — Expériences de Regnault : 1° expériences faites dans l'air libre; 2° expériences faites au moyen des tuyaux. — Effet de la variation de la pression. — Expériences sur divers gaz. —

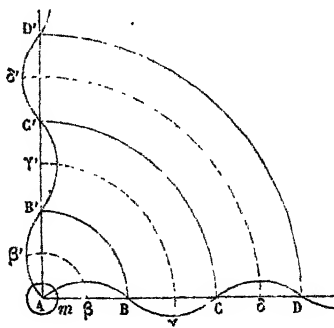
Détermination de $\frac{C}{c}$ et de l'équivalent mécanique de la chaleur. — Expériences de M. Kœnig. — Mesure directe de la vitesse du son dans l'eau et dans la fonte.

Mesure indirecte de la vitesse du son. — Cas des gaz. — Cas des liquides. — Cas des solides. — Méthode de M. Kundt. — Influence d'un mouvement de translation.

VIBRATIONS LONGITUDINALES ET TRANSVERSALES DANS UN MILIEU

INDÉFINI. — Considérons dans un milieu indéfini une sphère très petite A (fig. 54) se dilatant et se contractant alternativement, de façon que chaque élément m de sa surface exécute les mêmes vibrations longitudinales que la lame vibrante qui était à l'entrée d'un tuyau indéfini AD dans les expériences précédentes. Ces vibrations se transmettront suivant AD, avec une certaine vitesse V_1 . La courbe figurative des vitesses sera

Fig. 54.



ABCD...; la distance BD de deux nœuds identiques sera égale à λ , et l'on aura toujours la relation

$$\lambda = \frac{V_1}{N}.$$

Les mêmes effets se produiront dans toutes les directions; le mouvement se représentera, à un moment donné, par des ondes sphériques $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$,..., alternativement condensées et dilatées, séparées par des sphères de repos BB' , CC' , DD' . Le temps croissant de θ , les sphères grandiront et leur rayon croîtra de $V_1\theta$.

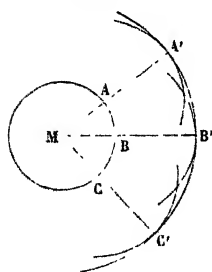
Le son émis par A vient successivement se répartir sur des sphères concentriques de rayons r , r' , r'' ,..., c'est-à-dire sur des surfaces $4\pi r^2$, $4\pi r'^2$, $4\pi r''^2$,...; et, en désignant par i , i' , i'' ,... les quantités de force vive vibratoire reçues sur l'unité de surface, ou les *intensités* du son, il faudra que l'on ait

$$r^2 i = r'^2 i' = r''^2 i'' = \dots;$$

donc les intensités sont en raison inverse du carré des distances.

Il est facile de comprendre comment se fait la propagation de

Fig. 55.



ces ondes. En effet, avant d'arriver, au temps t' , sur la sphère $A'B'C'$, le son a occupé, au temps t , l'onde intermédiaire ABC (fig. 55), et ce sont les différents points de celle-ci qui ont, comme autant de centres sonores, envoyé des ondes particulières dont l'enveloppe est la sphère résultante $A'B'C'$, sur laquelle le son arrive après un temps donné. On remarquera que le premier mouvement qui atteint B' vient de B, ce qui montre que

le son arrive en ligne droite de M en B' , en passant par B.

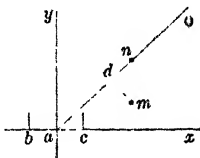
On démontrera, en Optique, avec tout le soin nécessaire, que le mouvement vibratoire au temps t appartient exclusivement à la sphère $A'B'C'$. Ce principe a été démontré par Huygens ⁽¹⁾.

Ce que nous venons de dire des vibrations longitudinales

(1) HUYGENS, *Traité de la lumière*, Leyde, 1690.

s'appliquerait aux vibrations transversales, si l'on supposait que la sphère A (*fig. 55*) fût douée d'un mouvement de vibration tangentiel. On aurait les mêmes courbes des vitesses suivant chaque direction, les mêmes sphères concentriques; seulement la vitesse de propagation aurait une autre valeur V' . Cette sorte de mouvement ne pourrait point se transmettre dans les liquides et dans les gaz, parce que le mouvement tangentiel des sphères concentriques ne communiquerait aucun déplacement sensible aux molécules voisines, à cause de la facilité qu'elles ont de glisser les unes contre les autres, ce qui est la propriété qui caractérise les fluides. Mais les solides transmettront à la fois les deux mouvements. Enfin, si nous supposons que dans un solide les vibrations initiales soient produites d'une manière arbitraire, par exemple par une lame élastique oscillant de c en b (*fig. 56*), on démontre qu'un point tel que d est animé de deux vitesses, l'une longitudinale dn suivant la direction de propagation aO , l'autre transversale dm dirigée perpendiculairement. Toutes deux se propagent en ondes sphériques, mais avec les vitesses inégales V_1 et V' , et elles peuvent donner naissance à des sons distincts.

Fig. 56.



VIBRATIONS DES SURFACES LIQUIDES. — Pour nous familiariser avec ces questions, considérons ce qui se passe sur l'eau quand on agite un point de sa surface. On voit naître des cercles concentriques, les uns surélevés, les autres affaissés, qui se poursuivent, et un point quelconque de la surface, étant alter-

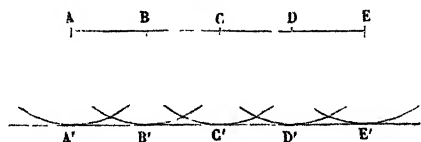
Fig. 57.



nativement atteint par les uns et les autres, éprouve des oscillations sensiblement verticales pendant que la propagation se fait suivant le rayon MA (*fig. 57*).

Supposons qu'on ébranle à la fois une série de points ABCD (fig. 58) par des gouttes liquides tombant à intervalles réguliers. Chacun est un centre d'ébranlement qui émet des ondes circulaires, lesquelles ont une enveloppe A'E' parallèle à AE;

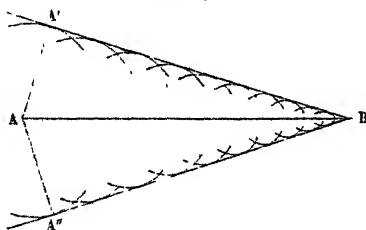
Fig. 58.



leurs mouvements sur cette enveloppe sont tous de même sens et s'ajoutent; il en résulte une onde rectiligne qui progresse avec une vitesse constante V et se compose alternativement de creux et de surélévations ⁽¹⁾.

Quand la proue d'un navire s'avance sur l'eau de A en B

Fig. 59.



(fig. 59), elle ébranle successivement les points de AB qui émettent des ondes dont les rayons sont proportionnels aux temps depuis lesquels elles ont été produites, c'est-à-dire à la distance de B à leur origine. Elles sont arrivées sur deux lignes droites BA' et BA'' : c'est le sillage du navire. Soient V' sa vitesse, V celle

de la propagation des ondes, on aura

$$\sin \angle ABA' = \frac{A'A}{AB} = \frac{V't}{Vt} = \frac{V'}{V};$$

⁽¹⁾ Cette vitesse de propagation est incomparablement plus faible que celle des ondes sonores, car elle n'est que de quelques décimètres. Elle varie peu avec la nature du liquide employé, mais elle augmente avec l'intensité de l'ébranlement central et surtout avec la profondeur du liquide. On en jugera par le Tableau suivant, extrait de l'Ouvrage des frères Weber (*Wellenlehre auf Experimente begründet*, Leipzig, 1825).

Les ondes étaient produites en aspirant le liquide dans un tube jusqu'à une

doñc

$$V' = \frac{V}{\sin \angle ABA'}.$$

On pourrait se servir de cette équation pour mesurer la marche d'un vaisseau.

RÉFLEXION DU SON. — Revenons maintenant à l'étude du son longitudinal. Il est facile de comprendre comment il se réflé-

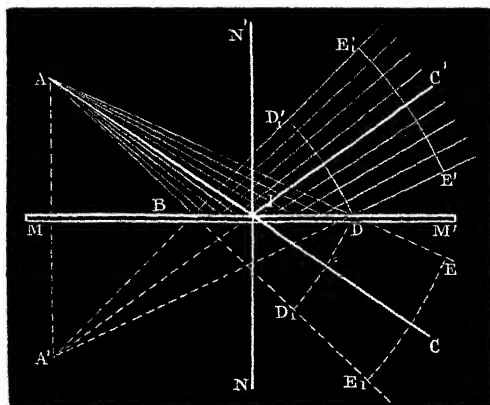
certaine hauteur, à l'une des extrémités d'une longue cuve rectangulaire, puis le laissant retomber.

PROFONDEUR du liquide.	HAUTEUR de la surélévation du liquide.	VITESSE DES ONDES	
		sur l'eau.	sur le mercure.
2 ^{cm} , 7	5,4	53,3	51,3
	8,1	54,4	54,0
	10,8	55,5	55,75
	16,2	56,9	60,3
	21,6	56,9	62,1
5 ^{cm} , 4	5,4	75,3	60,9
	8,1	75,9	64,3
	10,8	77,4	66,3
	16,2	77,0	65,5
	21,6	75,9	69,2
10 ^{cm} , 8	8,1	79,2	sur l'alcool.
	16,2	100,1	"
	32,4	100,1	"
21 ^{cm} , 6	32,4	135,1	135,0

Les frères Weber ont montré que les molécules liquides qui transmettent ces ondes exécutent des vibrations curvilignes et que les diverses circonstances du phénomène sont extrêmement compliquées; l'élasticité ne paraît y jouer aucun rôle; les effets de la pesanteur et de l'adhésion du liquide sont prépondérants. La théorie mathématique est encore à faire.

chit (fig. 60). Soit A l'origine de ce son ; au bout d'un temps t , il sera arrivé sur une sphère EE_1 . Mais supposons qu'il ait rencontré une surface élastique MM' , il en ébranlera les différents points, qui deviendront des centres sonores. Au bout du temps t , le point B aura envoyé le mouvement jusqu'à une distance égale à BE_1 , c'est-à-dire sur une sphère de rayon égal à BE_1 , le point D sur une sphère de rayon DE , et ainsi de suite. Toutes seront tangentes à EE_1 ; elles le seront aussi à une autre sphère $E'E_1$ symétrique, et qui pourra être considérée

Fig. 60.



comme décrite du point A' symétrique de A . Cette onde est le mouvement réfléchi ; et, si l'on considère un faisceau très petit AI , on voit qu'il se réfléchit suivant IC' et que l'angle d'incidence AIN' est égal à l'angle $A'IN$, ou à l'angle de réflexion $N'IC'$. Tout se passe comme si le son réfléchi venait du point A' situé derrière l'obstacle MM' et symétrique de A . Il coïncide avec l'image que A ferait dans un miroir MM' : c'est l'*image sonore* du point A qui donne le son direct.

La réflexion du son suivant les mêmes loi que celles de la chaleur ou de la lumière, les surfaces qui concentrent la lumière concentreront aussi le son. Une montre placée au foyer d'un miroir concave s'entend très distinctement quand on place l'oreille au foyer d'un miroir conjugué avec le pre-

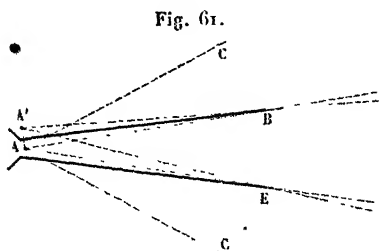
nier. De même, le moindre bruit que l'on produit à l'un des foyers d'une voûte ellipsoïdale s'entend très distinctement à l'autre foyer. C'est par des actions de ce genre que s'expliquent les cabinets parlants, etc.

ÉCHOS. — La route que parcourt le son réfléchi pour arriver à un point quelconque est toujours plus longue que celle du son direct qui se propage en ligne droite; il s'ensuit que le premier est toujours en retard sur le second. Quand l'obstacle qui réfléchit le son est peu éloigné, ce retard est à peine sensible, et le son réfléchi se confond avec le son direct; mais, si la distance est assez grande, les deux sons se séparent, il y a répétition : c'est le phénomène des échos. Lorsqu'il y a un grand nombre de parois réfléchissantes, on observe plusieurs répétitions ou des échos multiples.

Supposons que les obstacles soient disposés de telle sorte que les sons réfléchis reviennent au point de départ. Dans ce cas, l'écho sera distinct si les sons mettent, pour aller et revenir, des temps au moins égaux à leur durée propre. Pour prononcer une syllabe, il faut environ $\frac{1}{5}$ de seconde; pendant ce temps, le son parcourt $\frac{340}{5}$ ou 68^m; il peut revenir d'un obstacle éloigné de 34^m : c'est là la distance nécessaire pour obtenir un écho monosyllabique. Une distance double donne un écho de deux syllabes et ainsi de suite. Un écho double s'obtient par un second obstacle situé à une distance au moins double de celle du premier, etc. Il est d'ailleurs évident qu'on peut aussi obtenir des échos multiples par des réflexions successives entre deux obstacles seulement.

PORTE-VOIX. — Le porte-voix a pour but de remédier à l'affaiblissement que le son éprouve quand la distance augmente. Il peut consister simplement en un tube conique de carton ou de métal dont la *fig. 61* représente une section. On applique les lèvres dans une embouchure disposée au sommet du cône et l'on parle dans l'instrument en le dirigeant vers le point où l'on veut se faire entendre. Supposons, pour fixer les idées, que le son soit produit en un point unique A : la portion d'onde BAE se propagera comme si l'instrument n'existait pas; mais une deuxième partie comprise dans l'angle CAB sera réfléchie

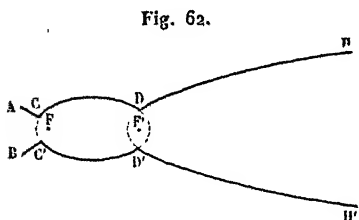
par la paroi, et, après cette réflexion, elle sera renvoyée dans l'angle $BA'E$ comme si elle partait du point A' , symétrique



de A , et elle se superposera sensiblement au cône BAE . Le même effet se produisant dans tous les plans diamétraux, on voit en définitive que l'onde CAC' se trouvera condensée dans un cône de moindre ouverture, et qu'au lieu de s'éparpiller

dans l'espace, le son sera dirigé vers l'axe de l'appareil. Il est facile de voir que, par deux, trois, etc., réflexions, d'autres rayons sonores viendront encore s'ajouter à ceux que nous venons d'examiner.

Hase ⁽¹⁾ imagina de remplacer le porte-voix conique par une combinaison de surfaces plus rationnellement disposées. Il faisait suivre l'embouchure AB d'un ellipsoïde $CDC'D'$ (fig. 62), et celui-ci d'un paraboloïde $DHD'H'$ ayant le même



foyer F' que lui. Les sons produits en F se concentraient en F' et, partant de ce point comme d'un centre d'ébranlement, ils arrivaient sur le paraboloïde qui les renvoyait parallèlement à l'axe. Par cette disposition, l'onde

sonore devenue cylindrique devait conserver une intensité constante à toute distance. On ajoute habituellement au porte-voix un pavillon semblable à celui du cor, et cette addition, dont l'effet ne s'explique point par la réflexion du son, améliore notablement l'appareil.

CORNET ACOUSTIQUE. — Le cornet acoustique a pour objet de

(¹) HASE, *Dissertatio de tubis stentoribus*, Lipsiæ, 1761.

concentrer dans l'oreille le mouvement sonore éparpillé sur une grande surface. On lui donne des formes très diverses qui ne sont justifiées par aucune théorie. La plus simple est celle du porte-voix renversé. L'extrémité étroite du tube conique est appliquée dans l'oreille et le pavillon dirigé vers le point d'où vient le son. Le mouvement vibratoire de la masse d'air contenue dans le pavillon se trouve ainsi concentré dans des sections de plus en plus petites, et, par suite, gagne en énergie ce qu'il perd en étendue.

RÉFRACTION DU SON. — On verra que la lumière se réfracte et que le rayon incident se rapproche de la normale quand elle passe d'un milieu dans un autre où elle se meut moins vite. Or le son va quatre fois plus vite dans l'hydrogène que dans l'air; il doit donc se réfracter et s'éloigner de la normale quand il passe de l'air dans ce gaz; inversement il doit se rapprocher de la normale quand il passe de l'air dans l'acide carbonique. M. Sondhaus ⁽¹⁾ l'a démontré en construisant une lentille biconvexe en baudruche qu'il remplit d'acide carbonique, et qui a la propriété de concentrer le son en un foyer. Signalons aussi quelques mesures faites par M. Hajech ⁽²⁾ sur des prismes gazeux ou liquides, par une méthode analogue à celle de Descartes ⁽³⁾ pour la mesure des indices de réfraction. L'indice observé s'est montré très sensiblement égal au rapport des vitesses de propagation du son dans la matière du prisme et dans l'air.

VITESSE DU SON.

FORMULES DE NEWTON ET DE LAPLACE. — Après avoir montré par quelle série de mouvements le son se propage dans les milieux, il nous reste à déterminer quelle est la vitesse de sa transmission. Nous nous occuperons d'abord de la propagation des vibrations longitudinales dans un cylindre indéfini.

⁽¹⁾ SONDHAUS, *Ann. de Pogg.*, t. LXXXV, p. 378.

⁽²⁾ HAJECH, *Nuovo Cimento*, 1857.

⁽³⁾ Voir *Optique géométrique*.

Nous avons établi (p. 33) que cette vitesse est donnée par la formule (1)

$$(1) \quad v = \sqrt{\frac{E}{\delta}},$$

dans laquelle δ désigne la masse de l'unité de volume du cylindre, E un coefficient qui dépend de ses propriétés élastiques, et qu'il s'agit actuellement de déterminer. Rappelons que, en désignant par ds l'allongement d'une portion du cylindre, dont la longueur à l'état d'équilibre est dx , la tension rapportée à l'unité de surface qu'il faudrait appliquer aux bases du cylindre pour le maintenir dans cet état a pour valeur $E \frac{ds}{dx}$.

Plusieurs cas peuvent se présenter :

1° La constitution du milieu dont est formé le cylindre est telle, que la variation de température accompagnant une faible variation de volume, opérée à chaleur constante (2), est tout à fait négligeable. Nous savons que c'est ce qui a lieu pour les liquides et les solides. Désignons alors par e le coefficient d'élasticité, c'est-à-dire la tension qu'il faudrait appliquer sur les bases du cylindre de section 1 pour l'allonger d'une quantité ds égale à sa longueur primitive dx , la température étant maintenue constante ; on aura évidemment $e = E$,

$$(2) \quad v = \sqrt{\frac{e}{\delta}};$$

c'est la formule de Newton (3). Elle s'applique à la propagation du son dans un cylindre solide ou liquide ; mais nous ne tarderons pas à reconnaître qu'elle ne s'applique pas à la propagation des vibrations longitudinales dans une masse solide ou liquide indéfinie.

Laplace a mis la formule de Newton sous une forme différente. Soit ε l'allongement produit sur une barre tendue par

(1) Donnée pour la première fois par Laplace (*Ann. de Chimie*, 1^{re} série, t. III, p. 162 et 238 ; t. XX, p. 266).

(2) Voir t. II, p. 49**.

(3) NEWTON, *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, t. I, Liv. III, proposition 48.

son poids; d la densité par rapport à l'eau de la substance dont elle est formée; on a

$$\frac{\varepsilon}{1} = \frac{gd}{e} = \frac{g\delta}{e},$$

par suite,

$$V = \sqrt{\frac{e}{\delta}} = \sqrt{\frac{g}{\varepsilon}}.$$

2° Dans le cas d'un cylindre gazeux, la chaleur dégagée par la compression ou absorbée par la dilatation est loin d'être négligeable, et les vibrations sonores étant trop rapides pour que l'équilibre de température puisse se produire à chaque instant entre la colonne de gaz vibrante et la paroi du tube qui la renferme, la valeur de E ne peut plus être confondue avec le coefficient d'élasticité.

Nous nous bornerons à étudier le cas d'un gaz parfait défini par la relation

$$\frac{pv}{T} = \text{const.}$$

en supposant qu'il ne se produise aucun échange de chaleur entre la masse gazeuse et les parois du vase qui la renferme. Dans ces conditions, nous avons établi (t. II) que, pour produire une augmentation de volume dv , il faut diminuer la pression (ou augmenter la tension) d'une quantité dp , donnée par la formule

$$\frac{dp}{p} = \frac{C}{c} \frac{dv}{v};$$

mais, dans le cas actuel,

$$\frac{dv}{v} = \frac{ds}{dx},$$

et, par suite,

$$dp = \frac{C}{c} p \frac{ds}{dx} = E \frac{ds}{dx},$$

$$(3) \quad E = \frac{C}{c} p.$$

Le coefficient d'élasticité c n'est, dans le cas d'un gaz parfait, autre chose que la pression initiale p ; on voit donc que l'effet des variations de température qui accompagnent les changements de volume, est d'augmenter l'élasticité apparente dans le rapport $\frac{C}{c}$ de la chaleur spécifique du gaz à pression constante à sa chaleur spécifique sous volume constant.

En substituant à E sa valeur dans l'équation (1), on obtient

$$(4) \quad v = \sqrt{\frac{C}{c} \frac{p}{\rho}}.$$

Cette formule n'est applicable qu'aux gaz parfaits, c'est-à-dire obéissant rigoureusement à la loi de Mariotte. Elle est susceptible d'être transformée de manière à se prêter plus aisément aux applications numériques. Désignons par ρ la densité du gaz par rapport à l'air, par Δ la densité, par rapport à l'eau, de l'air à zéro et sous la pression normale P ; on trouve aisément

$$v = \sqrt{\frac{C}{c} \frac{P}{\Delta \rho} \frac{T}{273}}.$$

Prenons pour unités fondamentales le centimètre, le gramme et la seconde. La pression P doit être évaluée en dynes par centimètre carré; elle a pour valeur 1033.980,896. On a d'ailleurs $\Delta = 0,001293$. La formule devient donc

$$(5) \quad v = \sqrt{\frac{C}{c} \frac{1033.980,896}{0,001293} \frac{1}{\rho} \frac{T}{273}} = 27994 \sqrt{\frac{C}{c} \frac{1}{\rho} \frac{T}{273}},$$

et donne la vitesse du son en centimètres par seconde.

Pour un même gaz, cette vitesse est indépendante de la pression p , et varie proportionnellement à la température absolue, c'est-à-dire au binôme de dilatation.

Il est à remarquer maintenant que les particules d'un gaz parfait ne présentent aucune adhérence les unes par rapport aux autres, et que les pressions se transmettent également dans tous les sens autour d'un point; par suite, la vitesse de propagation du son dans une masse de gaz indéfinie ne peut

différer de sa vitesse dans un tuyau cylindrique. Les formules (4) et (5) sont donc immédiatement applicables à la propagation du son dans l'atmosphère.

3° Si l'on a affaire à un gaz qui s'écarte notablement de la loi de Mariotte, les formules (4) et (5) ne s'appliquent plus, et le coefficient E n'est plus proportionnel à la pression. Toutefois, comme la pression dans une onde condensée ou dilatée ne diffère jamais beaucoup de la pression du milieu ambiant, il est légitime de développer E en série suivant les puissances de $\frac{dv}{v}$ ou $\frac{ds}{dx}$, on aura alors pour V une expression telle que

$$(6) \quad V = 27994 \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{T}{273} \left(A + B \frac{ds}{dx} + \dots \right)}.$$

A est le rapport des chaleurs spécifiques sous pression constante et à volume constant pour une variation de volume ou de pression infiniment petite; B un coefficient qu'on pourra déterminer par l'expérience, si l'on suppose le développement réductible à ses deux premiers termes. Regnault a fait usage d'une formule empirique de cette espèce.

FORMULES GÉNÉRALES RELATIVES AUX CORPS SOLIDES. — Nous avons vu que tout mouvement vibratoire produit à l'intérieur d'une masse solide indéfinie se décompose en deux ondes, l'une longitudinale, l'autre transversale, qui se propagent avec des vitesses V_1 et V' différentes. La théorie générale de l'élasticité fournit pour valeurs de ces vitesses

$$(7) \quad \begin{cases} V_1 = \sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}} \frac{e}{\delta}, \\ V' = \sqrt{\frac{1}{2(1+\mu)}} \frac{e}{\delta}; \end{cases}$$

δ désigne toujours la masse de l'unité de volume, e le coefficient d'élasticité, enfin μ représente le rapport de la contraction transversale à la dilatation longitudinale dans une barre formée du même solide, quand on la soumet à une traction dans le sens de sa longueur.

On ne doit pas être surpris que la vitesse V_1 des ondes longitudinales diffère de la vitesse $V = \sqrt{\frac{e}{\delta}}$ que nous avons trouvée pour le cas des barres cylindriques. En effet, une barre que l'on fait vibrer se comporte, aux points où passe l'onde dilatante, comme une barre que l'on étire; elle diminue de section en même temps qu'elle s'allonge, et elle s'élargit en se raccourcissant sur le trajet de l'onde condensante. Il n'en est pas de même pour un solide indéfini qui vibre dans son ensemble : car alors les dilatations et compressions transversales ne peuvent s'exécuter, et, par suite, la valeur des tensions sur les deux bases d'un cylindre, pris arbitrairement dans le milieu, doit être autre que si ce cylindre vibrerait isolément.

Si l'on admet avec Wertheim ⁽¹⁾ la valeur $\mu = \frac{1}{3}$ pour tous les corps solides, les formules (7) se réduisent à

$$(7 \text{ bis}) \quad \begin{cases} V_1 = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{e}{\delta}} = \sqrt{\frac{3}{2}} V, \\ V' = \sqrt{\frac{3}{8} \frac{e}{\delta}}. \end{cases}$$

Le rapport $\frac{V}{V'}$ est alors égal à 2.

Ces propositions n'ont pu être soumises jusqu'ici à aucune vérification expérimentale.

MESURE EXPÉRIMENTALE DE LA VITESSE DU SON.

VITESSE DU SON DANS L'AIR. — ANCIENNES EXPÉRIENCES. — Nous allons étudier les méthodes employées pour la mesure de la vitesse du son : elles sont directes ou indirectes. Nous nous occuperons d'abord des méthodes directes, et nous les appliquerons à l'étude de la vitesse du son dans l'air.

Les expériences exécutées à ce sujet sont extrêmement nom-

(¹) WERTHEIM, *Ann. de Chim. et de Phys.*, 5^e série, t. XII; 1844.

breuses⁽¹⁾; les plus célèbres furent faites en 1738 par les membres de l'Académie des Sciences. Ils avaient choisi pour stations l'Observatoire, Montmartre, Fontenay-aux-Roses et Montlhéry. Les observations, qui se faisaient la nuit, commençaient après un signal donné par une fusée qu'on lançait de l'Observatoire. Ensuite on tirait de dix minutes en dix minutes un coup de canon à l'une des stations; on mesurait à toutes les autres le temps qui s'écoulait entre l'arrivée de la lumière et l'arrivée du bruit, et la distance des stations ayant été rigoureusement mesurée d'avance, on calculait la vitesse du son en divisant cette distance par le temps observé. Ces observations furent continuées pendant plusieurs jours avec des conditions atmosphériques très différentes, et l'on reconnut : 1° que la vitesse du son est indépendante de la pression et de l'état hygrométrique de l'air; 2° qu'elle est constante à toute distance, c'est-à-dire que le son se transmet uniformément; 3° qu'elle augmente avec la température; 4° qu'elle s'ajoute à la vitesse

(1) Dans un Opuscule récemment publié à Berlin, le Dr Benno Mecklenburg fournit l'énumération suivante des recherches anciennes :

Mersenne, 1657, *Galisteia*, prop. XXXV.

Académie de Florence, 1660 (*Tentam. Experim. Academ. del Cimento*, 1738, t. II, p. 116).

Waleker, 1698 (*Philosophical Transactions*, 1698).

Cassini et Huygens (DUMAMEL, *Histoire de l'Académie royale*, t. II).

Derham (1704-5); Flamstead et Halley (1707-8) (*Philosophical Transactions*, 1708-1709).

Commission de l'Académie des Sciences, 1738 (*Mémoires de l'Académie des Sciences*).

La Condamine, à Quito en 1740 et à Cayenne en 1744 (*Journal du voyage fait par ordre du roi à l'Équateur*, t. I, p. 98). — Bianconi, 1740 (*Comment. Bonon.*, t. II, p. 365).

Kästner, 1778 (*Gött. gel. Anz.*, 1778, p. 1145).

J.-T. Mayer, 1778 (MAYER, *Praktische Geometrie*, 1792, t. I, p. 166).

G.-E. Muller, 1791 (*Gött. gel. Anz.*, 1791, p. 159).

Espinosa et Bauza, 1794, à Saint-Yago (*Ann. de Chim. et de Phys.*, 3^e série, t. VII, p. 93).

Benzenberg, 1809 (*Ann. de Gilbert*, nouvelle série, t. V, p. 383); 1811 (*Ann. de Gilbert*, t. XXXV, XXXIX et XLII).

Franklin, dans la mer de Behring (*Narration of the second expedition*, etc.).

Parry, 1821 et 1824 (*Journal of the third voyage*, etc.).

Gregory, 1824 (*Philosophical Magazine*, t. LXIII).

J et R., *Acoustique*. — III (4^e édit., 1886), 1^{er} fasc.

du vent ou s'en retranche suivant que le bruit et le vent marchent dans le même sens ou dans un sens opposé; 5° qu'elle est égale à 333^m à la température de zéro.

• Depuis cette époque, une nouvelle mesure, faite en 1822 par les membres du Bureau des Longitudes entre Montlhéry et Villejuif ⁽¹⁾, a donné 340^m,8 à 16°. Les coups de canon tirés de la première station furent tous entendus à la seconde, mais les coups inverses étaient tellement affaiblis, qu'un petit nombre d'entre eux seulement purent être observés. Cette circonstance inexpliquée ne permit point de corriger l'erreur provenant de l'agitation de l'air aussi exactement qu'on l'aurait désiré. Nous devons mentionner encore une observation intéressante de Biot ⁽²⁾. Il fit jouer à l'une des extrémités de l'aqueduc d'Arcueil un air de flûte bien connu qu'il écoutait en se plaçant à l'autre bout, et, remarquant que la mesure de l'air n'était point altérée, il en conclut que les sons de hauteur différente se propagent également vite. Enfin Bravais et Martins, en 1844, ont constaté, entre le sommet et la base du Faulhorn ⁽³⁾, que la vitesse du son est la même, soit qu'il aille en montant, soit qu'il aille en descendant, et qu'elle est de 332^m,37 à la température de zéro.

EXPÉRIENCES DE REGNAULT ⁽¹⁾. — On doit à Regnault un groupe d'expériences très complètes sur la propagation du son dans l'air libre ou dans les tuyaux.

Pour se mettre à l'abri des erreurs individuelles dans la mesure du temps, Regnault remplaçait l'observation directe par un enregistrement électrique opéré sans l'intervention de l'observateur. Supposons, pour fixer les idées, que l'onde dont on étudie la propagation soit produite par la décharge d'une arme à feu. Un fil tendu devant la bouche de l'arme fait partie d'un circuit contenant une pile et un électro-aimant, dont le

⁽¹⁾ *Connaissance des Temps*, 1825, p. 361; *Ann. de Chim. et de Phys.*, 2^e série, t. XX, p. 210 et 266. Il convient encore de signaler les recherches de Moll et Van Beck (*Ann. de Poggendorff*, t. V, p. 351 et 469).

⁽²⁾ *Ann. de Chim. et de Phys.*, 3^e série, t. XIII, p. 5; 1845.

⁽³⁾ *Mém. de la Société d'Arcueil*, t. II, p. 403 et suiv.

⁽⁴⁾ *Relation des expériences, etc.*, t. III, p. 3.

contact porte un style inscripteur; celui-ci s'appuie constamment sur une bande de papier noirci, déroulée uniformément et sur laquelle sont aussi enregistrés les battements d'un pendule. Au moment de la détonation, le fil est rompu et le style se déplace verticalement d'une petite quantité. En observant la position de la trace discontinue, on détermine l'instant de l'explosion à une très petite fraction de seconde près ⁽¹⁾.

L'organe sensible, destiné à enregistrer l'arrivée de l'onde en un point déterminé, est une membrane de caoutchouc tendue, disposée de façon à interrompre ou rétablir un circuit électrique dès qu'elle s'écarte de sa position d'équilibre. Ce circuit comprend un électro-aimant porteur d'un style qui laisse sa trace sur un papier enfumé. L'expérience a établi que l'intensité de l'onde nécessaire pour exciter la membrane est bien plus faible que celle qu'exige l'organe de l'ouïe.

1° *Expériences faites dans l'air libre.* — Elles ont été réalisées pendant l'hiver de 1864 au polygone de Satory. Regnault s'est préoccupé : 1° de mesurer avec exactitude la distance parcourue par le son; 2° de déterminer la température et l'état hygrométrique moyen de l'air; 3° d'éliminer l'action perturbatrice résultant de l'agitation de l'atmosphère.

L'onde produite par la décharge d'une pièce de canon était recueillie par une membrane soigneusement protégée contre les courants d'air, et tendue sur la base d'un cylindre terminé du côté opposé, c'est-à-dire du côté de l'atmosphère, par un cône évasé. La distance de la bouche du canon à la membrane était évaluée à l'aide d'un chaînage direct, et connue à moins de 0^m, 75^m près, sur une longueur totale de 2850^m.

En ce qui concerne la température, mesurée par des thermomètres sensibles, et l'état hygrométrique, déterminé à l'aide du psychromètre, Regnault s'est convaincu qu'il est impossible de fixer avec quelque exactitude leur valeur moyenne sur une aussi grande étendue, et il s'est borné à prendre la moyenne des indications d'appareils placés aux deux extrémités de la ligne parcourue. L'effet de la vitesse du vent était

(1) On pourrait remplacer le pendule par un diapason, comme dans la plupart des chronographes modernes.

corrigé, faute de mieux ⁽¹⁾, par un système d'observations alternées : à cet effet, deux pièces de canon placées aux deux extrémités de la ligne faisaient feu alternativement à une minute d'intervalle, et les ondes correspondantes étaient recueillies par deux appareils récepteurs distincts ; mais il est évident que cette correction est insuffisante. En effet, les nombres trouvés pour la vitesse du son, réduite à l'air sec et à la température de zéro, ont varié de 330^m, 08 à 331^m, 74.

La réduction relative à l'humidité de l'air se fait en déterminant la densité ρ de l'air humide par rapport à celle de l'air sec, et multipliant la vitesse mesurée par $\sqrt{\rho}$; on ramène l'observation à zéro, en multipliant encore par $\sqrt{\frac{273}{T}}$.

La moyenne de 167 couples de déterminations a donné

$$V = 330^m, 71.$$

2° *Expériences faites au moyen de tuyaux.* — Il semble, au premier abord, que, si l'on produit une onde à l'orifice d'un tuyau, la mesure de sa vitesse sera sujette à beaucoup moins de causes d'erreur que dans l'air libre, car dans un système de tuyaux souterrains, comme ceux du gaz ou des conduites d'eau, la température est très uniforme, l'air constamment saturé et à l'abri de l'agitation. Toutefois, l'expérience a montré qu'il faut se tenir en garde contre l'influence perturbatrice des parois : celles-ci introduisent un frottement dont on ne tient pas compte dans la théorie, et dont l'effet est à la fois de faire décroître très rapidement l'intensité et d'altérer la valeur de la vitesse. Ainsi, on devait penser qu'une onde conserve dans un tuyau une intensité sensible à une très grande distance de son point de départ, ce qui n'est pas vérifié par l'expérience. Le son produit par un pistolet chargé de 1^{re} de poudre cesse

(1) On corrigerait aisément la vitesse du son de l'effet d'un vent de direction et de vitesse connues (voir le Mémoire de Regnault, p. 479) ; mais, à moins que le vent ne soit très fort, sa direction, à un même instant, est extrêmement variable sur une étendue de 2^{km}, et il est impossible d'en tenir compte.

d'être perçu, soit par l'oreille, soit par une membrane de caoutchouc, aux distances indiquées ci-dessus :

Diamètre du tuyau	Distances auxquelles le son est sans action	
	sur l'oreille.	sur la membrane.
m 0,108	m 1150	m 4056
0,300	3810	11430
1,100	9540	19851

Une autre cause agit pour modifier la vitesse du son dans les tuyaux étroits : la paroi cède à l'onde dilatée de la chaleur qu'elle a empruntée à l'onde condensée, et il en résulte que la correction introduite par Laplace dans la formule de Newton est trop grande, et cela d'autant plus que la section du tuyau est plus faible ; par suite, la vitesse du son doit diminuer avec la section (1).

Regnault a réalisé des expériences très nombreuses sur plusieurs séries de tuyaux de différents diamètres ; il enregistre l'impulsion communiquée à une membrane adaptée à l'une des extrémités du tuyau par le son direct ou réfléchi une

(1) M. Kirchhoff (*Ann. de Pogg.*, t. CXXXIV, p. 177) a étudié l'effet théorique du frottement et des échanges de chaleur. Il est arrivé, pour la vitesse v , dans un tube de rayon r , et pour un son dont le nombre de vibrations est N , à la formule :

$$v = \frac{V}{1 + \frac{\gamma}{2r\sqrt{\pi N}}}$$

γ est une constante dépendant du frottement interne du gaz et de la quantité de chaleur qui est échangée par seconde à travers l'unité de surface de la paroi.

MM. Schneebeli (*Ann. de Pogg.*, t. CXXXVI, p. 296 ; 1869) et Adolphe Seebeck (*Ann. de Pogg.*, t. CXXXIX, p. 104 ; 1870) ont essayé de soumettre cette formule au contrôle de l'expérience en mesurant la vitesse du son dans des tuyaux très étroits par des méthodes fondées sur le principe des interférences. La loi des diamètres a été assez bien vérifiée ; mais la différence $V - v$ n'est pas en raison inverse de la racine carrée du nombre de vibrations.

Cette discordance entre la théorie et l'expérience tient peut-être à l'imperfection de la théorie du frottement intérieur des gaz (voir t. II, 3^e fascicule).

ou plusieurs fois sur les parois extrêmes. Il a ainsi constaté que la vitesse du son diminue avec le diamètre des tuyaux et avec l'intensité de la vibration. Ce dernier effet est surtout sensible avec les tuyaux de faible diamètre ; on en jugera par les Tableaux suivants :

Conduite de 0^m, 108.

Charge de poudre . 0 ^{gr} , 2.		Charge de poudre . 0 ^{gr} , 4.	
Chemin parcouru.	Vitesse moyenne.	Chemin parcouru.	Vitesse moyenne.
m	m	m	m
566,74.....	330,99	1351,95.....	329,95
1133,48.....	328,77	2703,90.....	328,20
1700,22.....	328,21	4055,85.....	326,77
2266,96.....	327,04		
2833,70.....	327,50		

Conduite de 0^m, 300.

Charge de poudre . 0 ^{gr} , 4		Charge de poudre . 1 ^{gr} , 4	
Chemin parcouru.	Vitesse moyenne.	Chemin parcouru.	Vitesse moyenne.
m	m	m	m
1905,0.....	332,14	3810,3.....	332,18
3810,0.....	329,53	7620,6.....	330,43
		11430,0.....	329,64
		15240,0.....	328,96

Conduite de 1^m, 10.

Charge de poudre . 1 ^{gr}	
Chemin parcouru.	Vitesse moyenne.
m	m
749,1.....	324,16
920,1.....	333,20
1417,9.....	332,50
2835,8.....	331,72
5671,8.....	331,24
8507,7.....	330,87
11343,6.....	330,68
14179,5.....	330,56
17015,4.....	330,50
19851,3.....	330,52

Regnault a pris, comme mesure exacte de la vitesse du son, la valeur constante observée pour la propagation de l'onde affaiblie dans les tuyaux de 1^m,10 de diamètre. Appliquant ensuite la formule empirique

$$V = \sqrt[3]{C \left(A + B \frac{ds}{dx} \right)}, \quad C = 27994^2 \frac{1}{3} \frac{T}{273},$$

dans laquelle la valeur de A est déterminée par la valeur minimum de V, il a calculé les valeurs de $\frac{ds}{dx}$ et de l'excès maximum correspondant de la pression de l'onde condensante sur la pression extérieure. Les résultats de ce calcul sont consignés dans le Tableau suivant :

CHEMIN PARCOURU.	VITESSE MOYENNE de propagation en mètres	$\frac{ds}{dx}$	EXCÈS DE PRESSION en millimètres.
740,1.....	334,16	0,04196	34,20
920,1.....	333,20	0,03283	24,90
1417,9.....	332,50	0,02399	18,24
2835,8.....	331,72	0,01414	10,75
5671,8.....	331,24	0,00808	6,14
8507,7.....	330,87	0,00341	2,57
11343,6.....	330,68	0,00101	0,77
14179,5.....	330,56	"	"
17015,4.....	330,50	"	"
19851,3.....	330,52	"	"

EFFET DE LA VARIATION DE LA PRESSION. — En raréfiant ou comprimant l'air dans les conduits, Regnault a constaté que la vitesse du son demeure invariable. Dans ces expériences, on a fait varier la pression de l'air de 0^m,557 à 0^m,838, sur une conduite de 0^m,108 de diamètre et 567^m de long; dans une autre expérience faite au Collège de France sur un tube de 70^m,5 de long, la pression a varié de 0^m,247 à 1^m,267.

EXPÉRIENCES SUR DIVERS GAZ. — Les mêmes tubes furent remplis de divers gaz, et l'on détermina le rapport de la vitesse du

son dans le gaz et dans l'air à la même température et à la même pression. Voici les résultats obtenus :

	CONDUITL. de 567°.	CONDUITE de 70°.	THEORIE.
Hydrogène	3,801	"	3,682
Acide carbonique...	0,7878	0,8009	0,8087
Protoxyde d'azote....	"	0,8007	0,8100
Ammoniaque	"	1,2279	1,3025

La comparaison du calcul et de l'observation est parfaitement satisfaisante. Il n'y a de différence notable que pour l'ammoniaque, gaz facile à liquéfier, auquel la formule (2) ne doit pas s'appliquer rigoureusement.

DÉTERMINATION DE $\frac{C}{c}$ ET DE L'ÉQUIVALENT MÉCANIQUE DE LA CHA-

LEUR. — La formule de la vitesse du son, comparée à l'expérience, fournit un moyen de mesurer le rapport des deux chaleurs spécifiques des gaz, et par suite l'équivalent mécanique de la chaleur. L'avantage particulier de cette méthode est de ne faire intervenir aucun appareil ou machine particulière, dont l'emploi trouble toujours les résultats.

Si l'on admet pour V la valeur 330^m,6 adoptée par Regnault comme moyenne générale de toutes ses expériences dans l'air libre et dans les tuyaux, on en déduit

$$\frac{C}{c} = 1,3945, \quad E = 436^{\text{kgm}},08 = 4,2775 \cdot 10^7 \text{ C. G. S.}$$

Cette valeur est notablement plus grande que celle qui se déduit des expériences de M. Joule sur le frottement. Mais il convient de remarquer qu'une erreur de 0^m,1 sur la valeur de V entraîne une erreur de 0^{kgm},69 environ sur celle de E , et, comme la vitesse du son n'est certainement pas exacte à plus de 0^m,5 près, la valeur de E qui s'en déduit peut être inexacte de trois à quatre unités, soit environ de $\frac{1}{100}$ de sa valeur.

EXPÉRIENCES DE M. KÖNIG. — Divers expérimentateurs, MM. Neumann ⁽¹⁾, Le Roux ⁽²⁾, R. König ⁽³⁾, ont cherché à mesurer directement la vitesse du son dans l'air, en lui faisant parcourir une longueur relativement très petite. Malheureusement, les expériences comparatives faites par Regnault sur des tubes de différentes longueurs ont montré que de nombreuses causes d'erreur interviennent quand on cherche à mesurer la vitesse du son au voisinage immédiat du point où il est produit. Nous nous bornerons à rapporter les expériences de M. König.

Le procédé qu'il emploie repose sur le principe des coïncidences. Deux compteurs électriques, formés chacun d'un petit marteau qui frappe sur un bouton incrusté dans une boîte à résonance, battent simultanément les dixièmes de seconde sous l'influence d'un ressort vibrant qui produit dans le courant électrique exactement dix interruptions par seconde. Quand les deux compteurs sont placés l'un à côté de l'autre, les coups secs qu'ils frappent s'entendent comme des coups simples; l'oreille ne peut pas les séparer; mais, dès qu'on déplace l'un des deux appareils, l'observateur restant près de l'autre, les coups cessent de coïncider, et l'on entend vingt au lieu de dix coups par seconde. C'est que les sons qui arrivent du compteur éloigné sont en retard sur les sons émis par le compteur qui est resté en place. La coïncidence a lieu de nouveau toutes les fois que la distance du compteur qu'on éloigne devient un multiple de 33^m, intervalle que le son franchit en un dixième de seconde. Plus généralement, le bruit des deux compteurs se confond toutes les fois que leurs distances à l'observateur diffèrent d'un multiple de 33^m. On peut ainsi mesurer la vitesse du son dans une salle un peu spacieuse, et le même procédé s'appliquerait facilement à la mesure de la vitesse du son dans les différents gaz ou liquides.

Le ressort interrupteur est réglé, en le comparant à un diapason de 40 vibrations doubles, par la méthode optique dont

(¹) E.-C.-O. NEUMANN, *Ann. de Pogg.*, t. CXXVII, p. 317; 1866.

(²) LE ROUX, *Comptes rendus*, t. LV, p. 662; 1862.

(³) R. KÖNIG, *Comptes rendus*, t. LV, p. 609; 1862.

il sera question plus loin. Un mécanisme spécial permet de maintenir rigoureusement constant le nombre de ses oscillations.

MESURE DIRECTE DE LA VITESSE DU SON DANS L'EAU ET DANS LA FONTE. — Colladon et Sturm ⁽¹⁾ ont cherché en 1827 quelle est la vitesse du son dans l'eau, entre deux bateaux qu'ils avaient amarrés à une distance connue sur le lac de Genève. Le premier supportait une cloche plongée dans l'eau, et un levier coudé, armé à sa base d'un marteau et à son sommet d'une mèche allumée, enflammait un tas de poudre en même temps qu'il frappait la cloche. Au second bateau était fixé un cornet acoustique dont le pavillon plongeait dans l'eau, et le sommet dans l'oreille de l'observateur, qui pouvait ainsi mesurer le temps écoulé entre l'apparition du signal lumineux et l'arrivée du son par l'eau. La vitesse cherchée se trouva égale à 1435^m à la température de 8°, 1.

La chaleur dégagée par la compression des liquides étant insignifiante, on peut appliquer la formule de Newton à la recherche de la vitesse du son dans l'eau; pour déterminer le coefficient d'élasticité e , nous remarquerons que le coefficient de compressibilité μ est la diminution de volume correspondant à une variation de pression égale à 1033.980,896 dynes par centimètre carré et que l'on doit avoir la proportion

$$\frac{e}{1033.980,896} = \frac{1}{\mu},$$

qui exprime que la variation du volume est proportionnelle à la pression

Pour l'eau à 4°, on a $\delta = 1$, $\mu = 0,0000499$ d'après Grassi; V est donné par la formule

$$V = \sqrt{\frac{e}{\delta}} = \sqrt{\frac{1033.980,896}{0,0000499}} = 142540^{\text{cm}} = 1425^{\text{m}},4,$$

nombre presque identique à celui de Colladon et Sturm.

(¹) COLLADON et STURM, *Mémoire sur la compression des liquides* (*Annales de Chimie et de Physique*, 2^e série, t. XXXVI, p. 242).

On voit que le son marche quatre fois et demie plus vite dans l'eau que dans l'air. Sa transmission est encore plus rapide dans les solides, ainsi que Biot ⁽¹⁾ l'a constaté pour la fonte de fer. Il opéra sur un assemblage de 376 tuyaux qui formaient une longueur totale de 951^m,25. Ils étaient réunis par des rondelles de plomb revêtues de futaine goudronnée et serrées par de fortes vis. La longueur totale des rondelles, qui était de 5^m,61, pouvait être négligée. On fixa dans le dernier tuyau, tout près de son orifice, un anneau de fer de même diamètre que lui. Cet anneau portait à son centre un timbre et un marteau qu'on pouvait laisser tomber à volonté, et qui frappait à la fois le timbre et le tuyau. En se plaçant à l'autre extrémité, on entendit distinctement deux sons pour chaque coup de marteau, le premier transmis par le corps du tuyau avec une vitesse x , le second par l'air avec la vitesse connue V , et ils étaient séparés par un intervalle de temps égal à 2^s,5. On avait donc

$$\frac{951,2}{V} - \frac{951,2}{x} = 2,5,$$

ce qui permit de calculer x , qui fut trouvé égal à (10,5) V .

L'eau et la fonte de fer sont les seules substances solides ou liquides dans lesquelles on ait fait des observations directes, et l'on n'aurait jamais pu trouver la vitesse du son dans les autres corps si l'on n'avait eu recours à des procédés indirects, fondés sur l'emploi des formules relatives aux tuyaux, aux cordes, etc.

MESURE INDIRECTE DE LA VITESSE DU SON. — Nous avons montré précédemment que, si l'on imprime des vibrations longitudinales à une colonne cylindrique de longueur L formée par une substance quelconque, gazeuse, liquide ou solide, elle se divise en concamérations séparées par des nœuds fixes dont les distances sont égales à la demi-longueur d'onde, et qu'elle

(1) *Mémoires de la Société d'Arcueil*, t. II, p. 403 et suiv.

donne des sons exprimés généralement par la formule

$$N = \frac{n}{4L} V,$$

V étant la vitesse du son et n un nombre entier dépendant de l'harmonique produit et des conditions dans lesquelles se trouvent les extrémités du cylindre; n est connu pour chaque harmonique, et, conséquemment, si l'on détermine le nombre de vibrations N , on pourra calculer la valeur de V .

Cette méthode est applicable à tous les corps. Elle n'offrirait aucune difficulté si les nœuds et les ventres se formaient exactement aux endroits précis que la théorie leur assigne. Malheureusement, il y a toujours des perturbations qui les déplacent; mais l'expérience a montré que ces perturbations ne se manifestent qu'aux extrémités et ne changent point sensiblement la distance des nœuds qui se forment vers le milieu du cylindre quand il rend un harmonique élevé. Cela étant, voici comment on a déduit la vitesse du son des vibrations longitudinales.

CAS DES GAZ. — D. Bernoulli (1) eut le premier l'idée de mesurer la vitesse du son dans l'air au moyen des tuyaux d'orgue; mais il n'a pu s'affranchir des causes d'erreur dont nous venons de parler. Après lui, Dulong (2) a réussi à les éliminer par un artifice ingénieux. Il employait un tuyau cylindrique très étroit, et il engageait dans l'extrémité opposée à l'embouchure un piston à tige divisée que l'on pouvait enfoncer à volonté et dont on mesurait la course par la division qu'il portait. On commençait par le fixer à l'extrémité du tuyau dans lequel on insufflait un courant d'air assez rapide pour produire un harmonique élevé. Alors il se formait $n + 1$ nœuds : le premier à une distance de l'embouchure qui, théoriquement, devrait être $\frac{\lambda}{4}$, mais qui en réalité était $\frac{\lambda}{4} + x$; le dernier, qui

(1) D. BERNOULLI, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1762.

(2) DULONG, *Annales de Chimie et de Physique*, 2^e série, t. XLI, p. 113; 2829.

devrait se confondre avec la surface du piston si ce dernier formait une cloison parfaitement élastique, mais qui, pratiquement, peut se trouver à une distance y très faible; tous les autres sont séparés par une longueur d'onde exacte. En résumé, la longueur réduite L du tuyau était égale à

$$\frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2} + x + y = \frac{\lambda}{4} + n \frac{\lambda}{2} + x'.$$

On enfouissait ensuite le piston jusqu'à reproduire le son primitif. Alors les internœuds intérieurs et les perturbations restaient les mêmes; seulement il y avait une concamération de moins, et, la nouvelle longueur L' du tuyau étant égale à $\frac{\lambda}{4} + (n-1) \frac{\lambda}{2} + x'$, la différence $L - L'$, qui représente la course du piston, mesurait la demi-longueur de l'onde $\frac{\lambda}{2}$, et l'on avait

$$L - L' = \frac{V}{2N}.$$

On déterminait N en faisant vibrer une sirène à l'unisson du tuyau et en comptant ses vibrations.

Pour opérer dans des gaz autres que l'air, Dulong plaçait le tuyau horizontalement dans une caisse en bois doublée de plomb. La tige du piston passait dans une boîte à étoupes et l'on mesurait sa course comme précédemment; l'embouchure était en communication avec un réservoir contenant le gaz qu'on voulait étudier; ce gaz faisait parler le tuyau, remplissait la caisse, et les expériences étaient conduites absolument comme dans l'air.

La valeur de V une fois connue, Dulong calcula $\frac{C}{c}$ par la formule indiquée précédemment.

Les résultats sont résumés dans le Tableau suivant :

Vitesse du son dans les gaz à la température de zéro.

	a m	$\frac{a}{c}$
Air.....	333,00	1,421
Oxygène.....	317,17	1,415
Hydrogène.....	1269,50	1,407
Acide carbonique.....	261,60	1,338
Oxyde de carbone.....	337,40	1,427
Protoxyde d'azote.....	261,90	1,343
Gaz oléfiant.....	314,00	1,240

Ce sont les valeurs précédentes de $\frac{C}{c}$ qui ont servi à calculer les valeurs de l'équivalent mécanique de la chaleur que nous avons rapportées dans une autre partie de cet Ouvrage.

Au lieu d'éliminer par un procédé expérimental l'erreur occasionnée par les extrémités, Wertheim ⁽¹⁾ a réussi à la calculer de la manière suivante. Il prit un tuyau cylindrique étroit composé de parties qui pouvaient s'ajouter l'une à l'autre par des raccords à vis (*fig. 63*), de façon que la longueur de-

Fig. 63.



venait successivement L_1, L_2, L_3, \dots , mais, l'embouchure et la section restant toujours les mêmes, les perturbations x et y étaient constantes, et les sons obtenus, N_1, N_2, N_3, \dots ceux qu'auraient donnés des tuyaux de longueur théorique égale à

$$L_1 + x + y, \quad L_2 + x + y, \quad L_3 + x + y, \quad \dots$$

Supposons que l'on prenne les sons fondamentaux; on aura, si le tuyau est ouvert,

$$(1) \quad V = N_1(L_1 + x + y), \quad V = N_2(L_2 + x + y), \quad \dots;$$

⁽¹⁾ WERTHEIM, *Annales de Chimie et de Physique*, 3^e série, t. XII, p. 385; 1844.

en éliminant V entre ces équations et la première, on obtient

$$\alpha + \gamma = \frac{N_1 L_1 - N_2 L_2}{N_2 - N_1} = \frac{N_1 L_1 - N_3 L_3}{N_3 - N_1} = \dots$$

Wertheim a trouvé que les valeurs de $\alpha + \gamma$ ainsi calculées sont réellement constantes pour un même tuyau, tout au moins à partir d'une certaine longueur minimum, ce qui justifie l'hypothèse sur laquelle on s'appuie ⁽¹⁾; et, cette vérification une fois faite, on peut calculer V en combinant deux à deux les équations (1). Wertheim n'a opéré que sur l'air, mais à des températures très différentes; et, comme les vitesses V_t et V_0 , à t degrés et à zéro, sont liées entre elles par la relation

$$V_t = \frac{V_0}{\sqrt{1 + \alpha t}},$$

il a fait servir toutes ses mesures à la détermination de V_0 . On voit, par le Tableau suivant, que tous les résultats concordent entre eux et avec la mesure directe de V_0 .

Vitesse du son dans l'air.

t .	V_t .	V_0
0,5	331,98 ^m	331,70 ^m
2,0	332,74	331,53
4,5	332,75	330,04
8,0	335,43	330,62
8,5	338,05	332,91
12,0	339,46	332,23
12,3	343,01	335,53
16,6	338,68	329,17
26,6	347,82	332,01

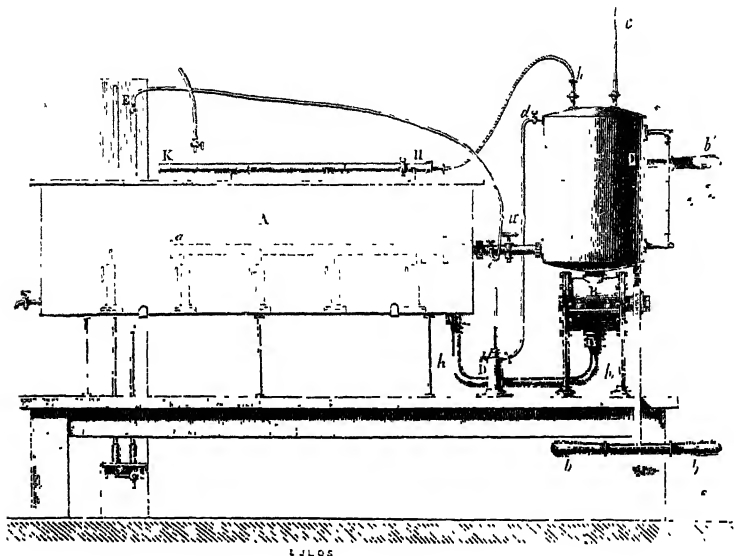
GAS DES LIQUIDES. — Quand on veut appliquer la même méthode aux liquides, on rencontre une difficulté très grande: c'est celle de faire parler les tuyaux. Cagniard de Latour ⁽²⁾ avait tenté quelques essais dans cette voie; mais c'est Wer-

⁽¹⁾ Voir pour les formules empiriques donnant la valeur de $\alpha + \gamma$ la note de la page 56.

⁽²⁾ CAGNIARD DE LATOUR, *Annales de Chimie et de Physique*, 2^e série, t. LVI, p. 252; 1834.

theim (1) qui a le premier réussi à faire vibrer des tuyaux à embouchure de flûte en les plongeant dans un liquide et en y injectant un courant de ce même liquide. Les sons qu'il a obtenus avaient le même caractère musical et donnaient les mêmes harmoniques que dans l'air : seulement ils étaient

Fig. 64.



accompagnés souvent de bruits étrangers produits par le choc du liquide sur l'embouchure, mais qui n'avaient aucune influence sur les mesures. Dès lors Wertheim put déterminer la vitesse du son dans les liquides, absolument comme il l'avait fait dans l'air. Son appareil est représenté *fig. 64*.

Le tuyau *aa* est couché horizontalement dans une cuve *A*, qui est pleine du liquide qu'on veut étudier. Une pompe à clapets *B*, qui se manœuvre par le levier *bbb'*, aspire ce liquide par le conduit *hh* et l'accumule dans un réservoir *C*. Celui-ci

(1) WERTHEIM, *Annales de Chimie et de Physique*, 3^e série, t. XXIII, p. 431; 1847.

est en communication par un tube *c* avec de grands cylindres pleins d'air comprimé, dont l'effet maintient la pression constante; il est de plus en rapport avec deux manomètres, l'un à air libre *E*, l'autre à air comprimé *D*, qui servent dans les cas des pressions basses ou élevées; enfin il envoie dans le tuyau *aa* un courant de liquide que l'on règle par le robinet *u*, de manière à obtenir le son fondamental ou un harmonique quelconque. L'appareil porte un second tuyau *KH* qui peut servir à faire des expériences dans l'air. Quand on voulait opérer sur des liquides rares, cet appareil était remplacé par un autre beaucoup moins long.

Wertheim trouva de cette façon que la vitesse du son dans l'eau est égale à 1173^m, nombre beaucoup plus faible que ceux qui résultent des autres méthodes. Il a interprété ce résultat en supposant que l'eau, pendant ses vibrations longitudinales, se comprime suivant les mêmes lois qu'un solide, en d'autres termes, qu'un cylindre liquide isolé augmente de section sur le trajet de l'onde condensante et se contracte transversalement sur celui de l'onde dilatante. Cette hypothèse, si elle est exacte, équivaut à admettre que la transmission latérale des pressions au sein d'une masse liquide n'est pas un phénomène instantané, ce qui n'a rien d'absurde en soi (*).

D'après cela, la vitesse 1173^m est celle qui convient à un filet liquide, et, pour un milieu indéfini, on doit avoir

$$V = 1173 \sqrt{\frac{3}{2}} = 1437^m,$$

ce qui est conforme aux résultats de l'expérience de Colladon et Sturm.

On voit, en résumé, que la vitesse du son dans l'eau a été obtenue par trois moyens : 1° par des mesures directes, qui ont donné 1435^m; 2° par la formule théorique $V = \sqrt{\frac{e}{\delta}}$, qui a conduit à 1424^m; 3° par l'étude des sons d'un tuyau, ce qui a

(*) L'effet de la communication aux parois de la pression latérale agirait aussi pour augmenter la section du liquide sur le trajet de l'onde condensante, etc.

fourni 1437^m. L'identité presque complète de ces résultats peut être considérée comme une démonstration de la formule et une justification de l'hypothèse de Wertheim. On pourra donc, avec toute confiance, appliquer à tous les autres liquides les deux derniers moyens, qui devront se contrôler mutuellement. Wertheim a déterminé, comme il l'avait fait pour l'eau, la vitesse du son pour divers liquides; puis, au moyen de la formule théorique, il a calculé leur coefficient de compressibilité μ . D'un autre côté, M. Grassi ⁽¹⁾ mesura directement ce coefficient μ , et l'on verra par le Tableau suivant que les deux méthodes concordent :

	TEMPÉRATURE.	VITESSE du son en mètres.	COMPRESSIBILITÉ CUBIQUE	
			PAR LA VITESSE du son	PAR LA MESURE directe (M. Grassi.)
Eau de Seine.....	15,0	1437,0	0,0000491	"
Eau de mer.....	20,0	1453,0	0,0000467	0,0000436
Chlorure de sodium....	18,0	1361,0	0,0000349	0,0000321
Sulfate de soude.....	20,0	1525,0	0,0000393	"
Carbonate de soude....	22,2	1594,0	0,0000337	0,0000297
Azotate de soude.....	20,9	1669,0	0,0000301	0,0000295
Alcool à 36°.....	20,0	1285,9	0,0000733	"
Alcool absolu.....	13,0	1159,8	0,0000947	0,0000991
Éther.....	0,0	1159,0	0,0001002	0,0001110

GAS DES SOLIDES. — Il n'y a aucune difficulté à faire vibrer les solides longitudinalement; il suffit de les façonner en tiges assez longues, de les saisir par le milieu et de les frotter avec un drap enduit de colophane. Si l'on mesure, d'une part, la longueur L des tiges, de l'autre le nombre N des vibrations qu'elles donnent, on trouvera la vitesse du son par la formule

$$V = NL.$$

⁽¹⁾ GRASSI, *Annales de Chimie et de Physique*, 3^e série, t. XXXI, p. 437; 1850.

Cette méthode a été indiquée et appliquée par Chladni ⁽¹⁾.

D'un autre côté, cette vitesse est exprimée par la formule de Laplace

$$V = \sqrt{\frac{e}{\delta}},$$

- et, comme on a déterminé directement les coefficients d'élasticité e , on pourra voir si les deux procédés de mesure sont concordants. C'est en effet ce que démontrent les résultats suivants, dans lesquels la vitesse du son dans l'air est prise comme unité :

	Vitesse du son d'après	
	les vibrations.	la formule.
Argent recuit.....	8,057	7,940
Zinc distillé.....	9,683	9,188
Palladium recuit.....	»	8,803
Cuivre recuit.....	11,167	10,847
Platine recuit.....	8,111	8,045
Fer recuit.....	15,108	15,472
Acier recuit.....	15,108	14,716

MÉTHODE DE KUNDT. — Pour mesurer la vitesse du son dans les corps, on peut encore avoir recours à une méthode de comparaison imaginée par M. Kundt ⁽²⁾, et dont voici le principe. Soit à comparer la vitesse du son dans l'air et dans le verre. On prend un tube de verre fermé aux deux bouts par des bouchons mobiles et renfermant de l'air, avec un peu de poudre de lycopode. On fait vibrer le tube longitudinalement, de façon qu'il rende le son fondamental. Pour que la colonne d'air entre aussi en vibration, il faut que la distance des deux bouchons soit un multiple exact de la demi-longueur d'onde du même son dans l'air. Quand cette condition est réalisée, la poudre de lycopode se dispose régulièrement sur les nœuds de vibration, et l'on mesure la demi-longueur d'onde par la distance des deux nœuds consécutifs. Celle-ci est à la longueur du tube comme la vitesse du son dans l'air est à sa

⁽¹⁾ CHLADNI, *Acoustique*.

⁽²⁾ KUNDT, *Ann. de Pogg.*, t. CXXVII, p. 497; 1866.

vitesse dans le verre. Si, par exemple, le son se propage seize fois plus vite dans le verre, l'intervalle des deux bouchons placés aux extrémités du tube se divise en seize concamérations.

Connaissant la vitesse du son dans le verre, on pourra mesurer sa vitesse dans d'autres gaz que l'air, ou même dans des liquides. MM. Kundt et Lehmann ⁽¹⁾ sont parvenus à faire vibrer les liquides en implantant une tige de verre dans l'un des bouchons et en faisant vibrer celle-ci longitudinalement. Pour que l'expérience réussisse, il faut que le liquide soit bien purgé d'air; on doit aussi employer une poudre plus lourde que dans le cas précédent, par exemple de la limaille de fer.

INFLUENCE D'UN MOUVEMENT DE TRANSLATION. — Il est facile de voir que la hauteur apparente d'un son doit varier si la distance de l'oreille au corps sonore augmente ou diminue pendant l'observation. Supposons d'abord que l'observateur reste en place et que le corps sonore s'éloigne ou se rapproche de lui avec une vitesse uniforme kV , en faisant N vibrations par seconde. La première vibration parcourra la distance primitive x dans un temps $\frac{x}{V}$; celle qui sera émise au bout d'une seconde franchira la nouvelle distance $x \pm kV$ dans un temps $\frac{x}{V} \pm k$; elle sera en retard sur la première de $\pm k$ secondes. Le mouvement aura donc pour effet de faire parvenir à l'observateur N vibrations en $1 \pm k$ secondes, ou bien $\frac{N}{1 \pm k}$ en 1 seconde, par conséquent d'élever ou d'abaisser le son dans le rapport de 1 à $\frac{1}{1 \pm k}$, quand le corps sonore se rapproche ou s'éloigne avec la vitesse kV .

Supposons, en second lieu, que ce soit l'observateur qui se déplace. S'il était resté immobile, il aurait reçu N vibrations dans 1 seconde; mais, s'il s'est rapproché du corps sonore, il est allé au-devant des ondes et en a rencontré un nombre plus

(1) KUNDT et LEHMANN, *Ann. de Pogg.*, t. CLIII, p. 1; 1874.

grand; s'il s'est éloigné, il a retardé les rencontres et a reçu un nombre d'ondes plus petit que N . Il est facile de montrer qu'il recevra en 1 seconde les $N(1 \pm k)$ vibrations émises en $1 \pm k$ secondes. En effet, si au bout de 1 seconde l'observateur s'est rapproché de la source d'une quantité kV , il rencontrera une onde qui aura parcouru un chemin plus court de kV que celui de la première, ce qui équivaut à une avance de k secondes. Pour qu'elle atteigne l'observateur juste 1 seconde après la première onde, il faut donc qu'elle soit partie de la source, non pas 1 seconde, mais $1 + k$ secondes après l'autre; le retard de k secondes est compensé par l'avance de kV mètres. Il s'ensuit que, en parcourant le chemin $k\lambda$, l'observateur a rencontré successivement toutes les ondes émises pendant $1 + k$ secondes. S'il s'éloigne de la source, on trouve de la même manière qu'il rencontre en 1 seconde les ondes émises pendant $1 - k$ secondes. Par conséquent, s'il s'éloigne, la note qu'il perçoit est $N(1 - k)$, et, s'il se rapproche, elle devient $N(1 + k)$: le son s'abaisse ou s'élève dans le rapport de 1 à $1 \mp k$.

L'expérience confirme ces prévisions théoriques, formulées d'abord par Ch. Doppler (¹). Pour une locomotive qui marche avec une vitesse de 50^{km} à l'heure, ce qui équivaut à 14^{m} par seconde, on a

$$k = \frac{1}{25}, \quad 1 - k = \frac{24}{25}, \quad 1 + k = \frac{26}{25}.$$

Par conséquent, si la note du sifflet est un la , un observateur placé sur la voie croira entendre un la^b , quand la locomotive s'éloigne et un la^* quand elle s'approche; c'est, en effet, ce que l'on observe.

(¹) DOPPLER, *Ueber farbiges Licht der Doppelsterne*. Prag, 1842.

CHAPITRE V.

DE LA COMPOSITION DES MOUVEMENTS VIBRATOIRES.

Interférences. — Vibrations parallèles. — Composition des vibrations de même période. — Vibrations des plaques.
Interférences des vibrations de périodes inégales. — Battements. — Sons résultants. — Sons de variation.
Théorème de Fourier. — Phonautographie.
Composition des vibrations rectangulaires. — Discussion géométrique. — Caléidophone. — Méthode optique. — Stroboscope.
Vibrations complexes des verges; expériences de Melde. — Résonance.

INTERFÉRENCES. — Quand plusieurs ébranlements se propagent simultanément dans un milieu, un point P se trouve sollicité à chaque instant par une réaction élastique qu'on peut considérer comme résultant de la superposition des réactions éveillées par chacun des ébranlements. Si ceux-ci sont assez petits, chaque réaction est opposée en direction à l'ébranlement qui la produit et lui est proportionnelle, et par conséquent le mouvement résultant est la somme géométrique des mouvements individuels, et la vitesse, la somme géométrique des vitesses correspondantes. On dit que les mouvements considérés interfèrent.

VIBRATIONS PARALLÈLES. — COMPOSITION DES VIBRATIONS DE MÊME PÉRIODE. — En étudiant la réflexion du son dans un cylindre ou dans une corde limitée, nous avons déjà eu l'occasion d'étudier les phénomènes résultant de l'interférence de deux vibrations parallèles et de même période.

Soient, en général,

$$v = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

$$v' = \alpha' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x'}{\lambda} \right)$$

les vitesses des deux vibrations.

On obtiendra aisément

$$v + v' = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \varphi \right),$$

$$A^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + 2\alpha\alpha' \cos 2\pi \frac{x - x'}{\lambda},$$

$$\tan 2\pi\varphi = \frac{\alpha \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} + \alpha' \sin 2\pi \frac{x'}{\lambda}}{\alpha \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} + \alpha' \cos 2\pi \frac{x'}{\lambda}}.$$

Si l'on suppose que $\alpha = \alpha'$ ou que les amplitudes des mouvements soient égales

$$A^2 = 2\alpha^2 \left(1 + \cos 2\pi \frac{x - x'}{\lambda} \right) = 4\alpha^2 \cos^2 \pi \frac{x - x'}{\lambda}.$$

Par conséquent : 1° les vitesses s'ajouteront arithmétiquement si la différence de route $x - x'$ est nulle ou égale à un multiple pair de la demi-longueur d'onde $\frac{\lambda}{2}$, et le son sera renforcé; 2° elles se retrancheront, et leur différence sera nulle, si $x - x'$ est un multiple impair de $\frac{\lambda}{2}$; l'addition des deux sons produira du silence.

Au contraire, lorsque α sera égal à $-\alpha'$, c'est-à-dire lorsque les origines du mouvement auront à chaque instant des vitesses égales et opposées,

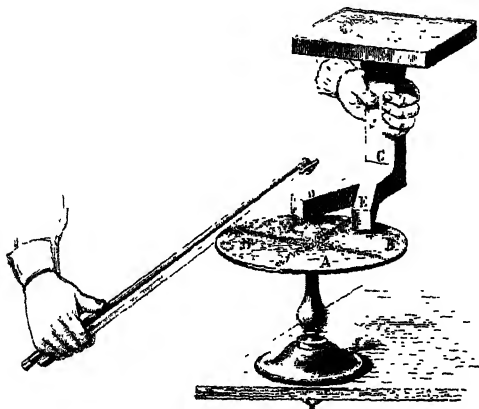
$$A^2 = 2\alpha^2 \left(1 - \cos 2\pi \frac{x - x'}{\lambda} \right) = 4\alpha^2 \sin^2 \pi \frac{x - x'}{\lambda}.$$

Alors le mouvement s'annulera si la différence des chemins parcourus $x - x'$ est, ou bien nulle, ou bien égale à un mul

multiple pair de $\frac{\lambda}{2}$. Ces phénomènes caractérisent les interférences.

On peut vérifier leur existence par plusieurs expériences concluantes. 1° On place au-dessus d'une plaque vibrante $AA'BB'$ (*fig. 65*) un tuyau bifurqué DEC capable de rendre le même son qu'elle. Ce tuyau résonne lorsque ses deux branches sont placées au-dessus de deux concamérations A, A', qui, au même moment, ont la même phase de vibration et par

Fig. 65.



conséquent envoient en un point quelconque, intérieur au tuyau, des vitesses concordantes. Au contraire, il ne rend aucun son lorsque les extrémités D et E sont toutes deux placées au-dessus de deux plages contiguës A' et B' dont les vibrations sont égales et contraires. Cette expérience a été imaginée par Hopkins ⁽¹⁾.

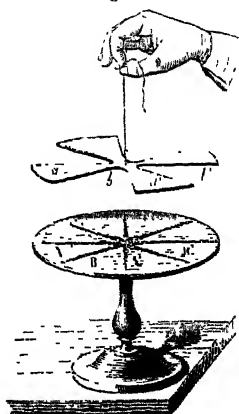
2° La deuxième expérience est due à Lissajous ⁽²⁾ (*fig. 66*). Quand on fait vibrer une plaque de manière qu'elle se divise en $2n$ concamérations A, B, A', B', . . . , il est évident que l'oreille, étant placée au-dessus, reçoit des mouvements inverses qui proviennent de chaque groupe de concamérations contiguës A et B, A' et B', etc., et qui, par conséquent, se dé-

⁽¹⁾ HOPKINS, *Ann. de Poggendorff*, t. XLIV, p. 246 et 603; 1838.

⁽²⁾ LISSAJOUS, *Comptes rendus*, t. XL, p. 133; 1845.

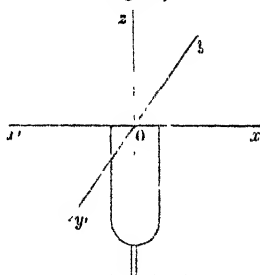
truisent en partie. Mais on renforce très notablement le son lorsqu'on superpose à la plaque un carton formé par n secteurs égaux a, a', \dots , qui laisse passer les vibrations concordantes émises par les plages B, B', \dots et qui intercepte les mouvements contraires envoyés par les concamérations A, A', \dots . En faisant tourner ce carton, on entendra successivement des renforcements et des affaiblissements lorsque les secteurs couvriront ou croiseront les concamérations.

Fig. 66.



3° Le son qui part de l'extrémité des branches d'un diapason offre des maxima et des minima d'intensité suivant la direction dans laquelle on se place. On le constate, soit en faisant tourner un diapason devant l'oreille, soit en promenant une caisse de résonance autour du diapason fixé dans un étau ⁽¹⁾ (fig. 67). L'intensité est maxima dans le plan de symétrie $yz y'$ des branches, lequel est parallèle à leur côté large, et dans la normale xx' à ce plan, c'est-à-dire parallèlement à leur épaisseur. Les minima sont sur une surface courbe qui coupe les plans xy et xz diagonalement par rapport aux axes x, y et x, z . Pour expliquer ce phénomène d'interférence, il faut supposer que les branches, en se rapprochant, envoient dans l'air : 1° deux ondes dilatantes dont l'intensité est maxima suivant xx' ; 2° une onde condensante dont l'intensité est maxima dans le plan $yz y'$, parce que c'est dans ce plan que tend à s'échapper l'air comprimé entre les

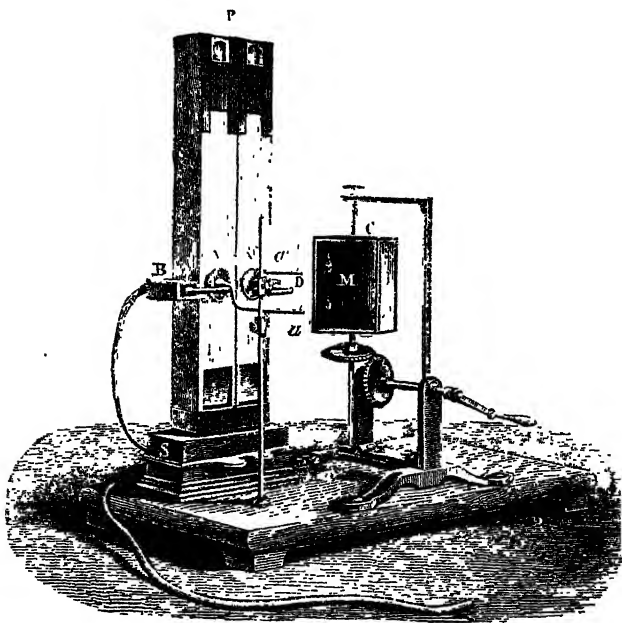
Fig. 67.



(1) Ce phénomène, reconnu d'abord par W. Weber, a été étudié par Kiessling (*Ann. de Pogg.*, t. CXXX, p. 177; 1867).

branches. Pendant la vibration de retour, les ondes dilatantes sont remplacées par des ondes condensantes, et *vice versa*. On conçoit dès lors qu'il doit y avoir une surface intermédiaire où les deux ondes sphériques qui partent de chaque branche offrent des intensités égales et contraires, de sorte que les dilatations de l'une détruisent les condensations de

Fig. 68.

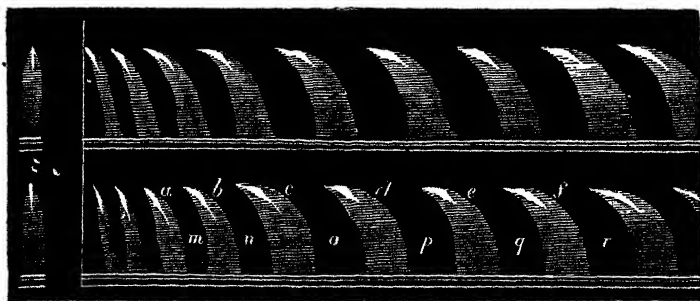


l'autre. On observe d'ailleurs les mêmes altérations d'intensité si l'on cache l'une des deux branches dans un tuyau ou derrière un écran parallèle à yz , afin d'en neutraliser l'action.

4° On place sur un même sommier, à côté l'un de l'autre, deux tuyaux d'orgue identiques (fig. 68). Quand on les fait vibrer séparément, ils donnent un son très fort; quand ils parlent en même temps, on n'entend presque plus rien, et le son s'ajoutant au son produit le silence. Cela se conçoit : quand le courant d'air de la soufflerie, en rencontrant le biseau de

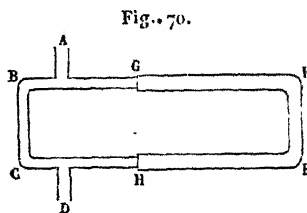
l'une des embouchures, ne pénètre pas dans le tuyau à cause de la résistance que lui offre l'air comprimé à l'intérieur, il entre dans le tuyau voisin, et, quand il trouve de la résistance dans celui-ci, il pénètre dans le premier. On peut s'en assurer comme il suit. Les deux tuyaux sont munis en leur nœud moyen de capsules manométriques A et A'. Les becs de gaz

Fig. 69.



qui leur correspondent, *a* et *a'*, sont placés l'un au-dessus de l'autre, et les flammes se reflètent en M sur un miroir tournant C. Si on les regarde dans ce miroir pendant qu'il tourne, on voit deux traînées lumineuses continues; mais, aussitôt que les tuyaux parlent, ces traînées se morcellent en deux séries discontinues d'images qui alternent de l'une à l'autre (*fig. 69*), ce qui prouve qu'il y a dilatation dans l'un des tuyaux pendant qu'il y a compression dans l'autre. Si les deux capsules communiquent avec une flamme unique, elle reste à peu près tranquille, et la bande lumineuse redevient sensiblement continue.

5° On prend un tube ramifié (¹) ABCDEF (*fig. 70*), dont les deux branches ABCD, AEFD ont des longueurs inégales. Quand on produit devant



(¹) Cette expérience, imaginée par Nörremberg, a été modifiée par M. Quincke

l'embouchure A un son que la branche ABCD peut renforcer, le tube parle ou reste muet, suivant que la différence de longueur des deux branches est égale à un nombre pair ou impair de demi-longueurs d'onde du son considéré. On peut allonger ou raccourcir la branche AEFD au moyen de la coulisse GH, de manière à produire plusieurs extinctions successives du son. M. Schneebeli ⁽¹⁾ a employé ce procédé pour la mesure des longueurs d'onde du son dans l'air, et par conséquent de la vitesse du son.

6° L'instrument le plus commode pour l'observation des interférences est la sirène double de M. Helmholtz ⁽²⁾ (*fig. 71*), qui se compose, comme l'indique son nom, de deux sirènes accouplées. L'une, inférieure, a un porte-vent B, un compteur CD et un plateau tournant autour d'un axe vertical, comme l'appareil de Cagniard de Latour; elle en diffère en ce que le plateau est percé de plusieurs séries de trous disposés sur des circonférences concentriques. Chacune d'elles correspond à une circonférence pareille percée dans le plancher du porte-vent et dont on peut ouvrir ou fermer les trous au moyen d'anneaux concentriques commandés par les clefs qu'on aperçoit en β . La deuxième sirène est au-dessus de la première et lui fait face; elle a son porte-vent en A, ses clefs en c , et son plateau tourne avec celui de la sirène inférieure autour du même axe vertical. Le plateau inférieur a quatre séries de 8, 10, 12 et 18 trous, le plateau supérieur quatre séries de 9, 12, 15 et 16 trous. Les deux tambours sont munis de boîtes de résonance, dont l'une est représentée en coupe. Mais le tambour a est mobile par le moyen d'une roue dentée E, ce qui permet d'établir une différence de situation entre les deux sirènes.

Supposons qu'on fasse résonner à fois les deux séries de 12 trous chacune; quand la sirène supérieure sera dans une

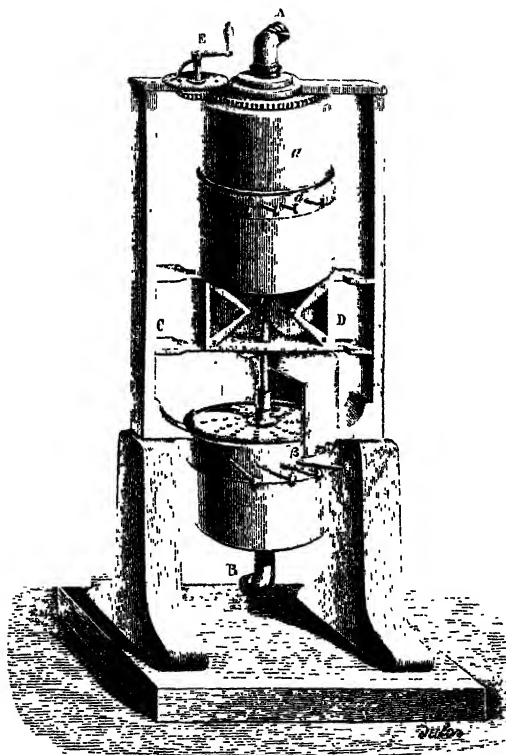
(*Ann. de Pogg.*, t. CXXVIII, p. 177; 1866) et par M. Kœnig, qui a substitué à l'emploi de l'oreille celui des capsules manométriques.

⁽¹⁾ SCHNEEBELI, *Ann. de Pogg.*, t. CXXXVI, p. 296; 1869.

⁽²⁾ HELMHOLTZ, *Théorie physiologique de la musique*, p. 203 de la traduction de M. Guérault.

certaine position, les émissions de vent se feront simultanément pour les deux plateaux; alors les deux sons auront la même phase et s'ajouteront; mais, lorsqu'on aura fait tourner le réservoir supérieur de 15° , ou de la moitié de l'intervalle de

Fig. 71.

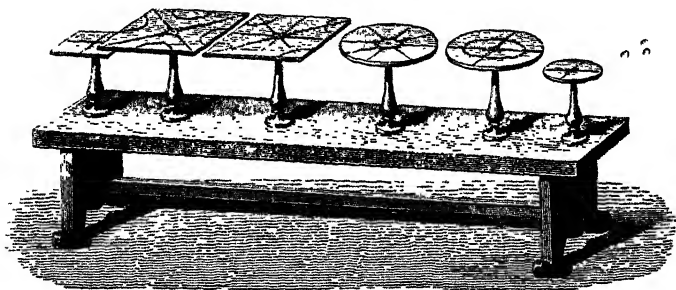


2 trous, les émissions de vent seront croisées, les phases différeront d'une demi-longueur d'onde, et les deux sons s'éteindront. Pour les octaves, le changement de phase est d'une longueur d'onde entière : elles s'ajouteront. L'expérience prouve, en effet, qu'on n'entend plus que très faiblement le premier harmonique. Si l'on fait tourner lentement le réservoir supérieur, on passera successivement des extinctions aux

renforcements; pendant un tour complet, le son fondamental disparaît 12 fois, l'octave 24 fois, etc.

VIBRATIONS DES PLAQUES. — Pour déterminer ces vibrations, on fixe les plaques par des vis de pression ou entre les doigts on appuie en outre, soit les doigts, soit des bouchons pointus, sur les parties qu'on veut immobiliser, tandis qu'on attaque avec l'archet le point du contour qu'on veut mettre en mouvement. La plaque donne un son et se partage en plages vibrantes qu'on nomme *concamérations*, qui sont séparées par des lignes nodales ou de repos (fig. 72). C'est donc par un

Fig. 72.



phénomène d'interférence, par la superposition de deux systèmes de vibrations parallèles qu'on peut expliquer les phénomènes offerts par les plaques minces.

Pour rendre les nodales des plaques apparentes, Chladni⁽¹⁾, a imaginé de semer sur la plaque un peu de sable fin qui se rassemble sur les parties immobiles. Elles sont linéaires et parfaitement régulières. On peut en conserver le dessin en appliquant sur la plaque une feuille de papier mouillée avec de l'eau légèrement gommée, et la retirant ensuite avec précaution. On enlève ainsi le sable, qui reste adhérent au papier quand on le fait sécher.

1° Les nodales séparant toujours des plages animées de vi-

(¹) CHLADNI, *Entdeckungen zur Theorie der Klänge*. Leipzig, 1787. Voir aussi son *Acoustique*, p. 98 et suiv.

tesses contraires, le nombre des concamérations est nécessairement pair.

2° Les modes de division dont une plaque est susceptible et les sons qui leur correspondent peuvent varier à l'infini. La (fig. 73) représente les plus simples de celles que peut donner une plaque carrée.

3° La même figure donne toujours la même note; mais plusieurs figures différentes peuvent correspondre à cette note.

4° Les plaques carrées offrent deux systèmes de nodaes rectilignes, les uns parallèles aux côtés, les autres suivant les diagonales; en outre, on obtient des nodaes courbes de formes très variées.

5° Sur les plaques circulaires, on trouve deux sortes de lignes immobiles : les premières constituées par des diamètres qui divisent la surface en un nombre pair de secteurs égaux; on les obtient en fixant sur la circonférence deux sommets consécutifs d'un polygone régulier inscrit de $2n$ côtés, et en frottant avec l'archet le milieu de l'arc que ces sommets comprennent. Le deuxième système consiste en circonférences concentriques. On les produit en fixant avec les doigts trois points de l'une de ces circonférences et en attaquant la lame soit sur son contour avec un archet, soit à son centre, en y fixant une tige que l'on fait vibrer longitudinalement (fig. 74), ou bien en y perçant un trou dans lequel on fait passer une mèche de crins enduits de colophane. Ces deux systèmes de figures peuvent se superposer.

6° Les timbres, cloches, tamtams et cymbales n'étant que des plaques courbes, leurs vibrations se font à peu près

Fig. 73.

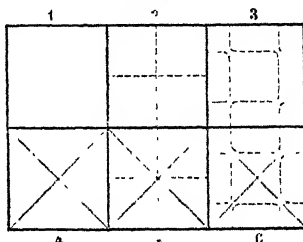
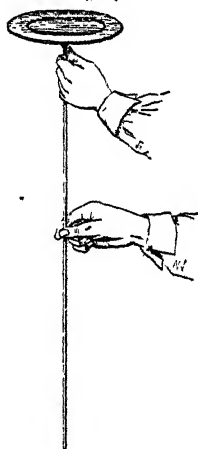


Fig. 74.



comme si elles étaient planes. Leur son le plus grave est produit quand elles se divisent en quatre parties égales séparées par deux lignes nodales rectangulaires. On le démontre en plaçant dans leur intérieur un liquide, qui est projeté vis-à-vis des ventres et reste immobile au contact des nœuds. Ces instruments sont remarquables par le nombre des sons supérieurs qu'ils font entendre.

7° Pour deux plaques de figure semblable qui éprouvent un même mode de division, les nombres de vibrations sont proportionnels aux épaisseurs et en raison inverse des surfaces :

$$\frac{N}{N'} = \frac{s'}{s} \frac{e}{e'}.$$

Cette loi est la même que pour les verges. Elle conduit comme conséquence à cet autre énoncé : « Des plaques semblables entre elles dans toutes leurs dimensions donnent des nombres de vibrations inversement proportionnels à leurs dimensions homologues quand elles éprouvent le même mode de division. »

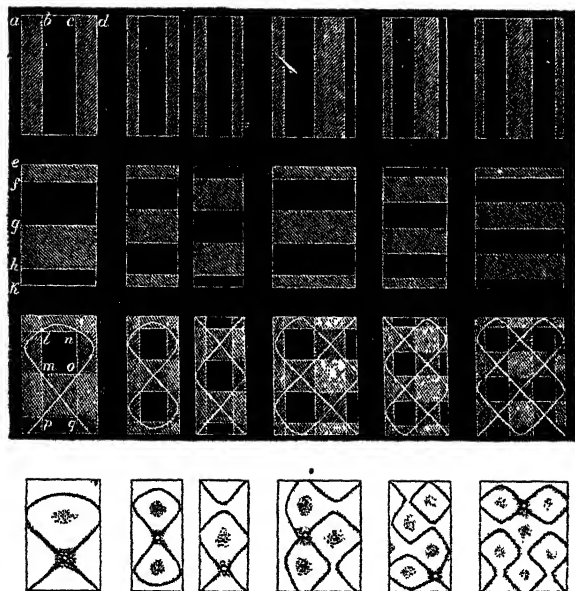
Voici maintenant l'explication élémentaire de ces phénomènes telle que l'a donnée Wheatstone ⁽¹⁾ en 1833, et telle qu'elle a été étendue par M. Kœnig ⁽²⁾ à des plaques rectangulaires. Supposons (*fig. 75*) que l'on ait deux verges de même substance et de même épaisseur, l'une de longueur *abcd*, l'autre de longueur *efghk*, et qui soient à l'unisson quand la première donne deux nœuds *b* et *c* et la deuxième trois nœuds *f*, *g*, *h*. Formons maintenant une plaque rectangulaire avec la largeur *acdb* et la longueur *efghk*. Elle admettra l'un et l'autre des systèmes de nœuds que donnaient les deux verges, puisqu'ils sont indépendants des largeurs de celles-ci, et rendra le même son en produisant l'un ou l'autre. L'expérience montre qu'elle ne peut les produire isolément, et Wheatstone admet qu'ils se superposent et qu'ils dé-

⁽¹⁾ WHEATSTONE, *Ann. de Pogg.*, t. XXVI, p. 151; *Ann. de Chimie et de Phys.*, 2^e série, t. XXIII, p. 313; 1824.

⁽²⁾ KOENIG, *Ann. de Pogg.*, t. CXXII, p. 238; 1862.

terminent ainsi une figure dont il nous sera facile de prévoir la forme générale. On sait en effet que, pendant la vibration d'une plaque, le mouvement est de sens opposé des deux côtés d'une nodale, positif à droite, négatif à gauche ou inversement. Nous marquons par des hachures les parties positives, et par des espaces noirs les plages négatives des deux systèmes, et nous figurons au-dessous leur superposition. Il est

Fig. 75.



clair que la courbe nodale résultante passera par les points de rencontre des lignes de repos rectilignes, en *l*, *m*, *o*, *p*, *q*, et par les cas où les vibrations positives de l'un des systèmes se superposent à des vibrations négatives de l'autre, car le repos ne peut résulter que du concours de mouvements contraires. Elle devra, en conséquence, affecter la forme que lui assigne le trait blanc dans la première figure du troisième rang horizontal du Tableau. Or on voit au-dessous celle que le sable trace sur la plaque. On trouvera dans les autres séries

verticales des figures du même Tableau de nouveaux exemples aussi concluants que le premier.

Lagrange ⁽¹⁾ a donné l'équation générale des plaques vibrantes. M. Radau a trouvé que cette équation admet la solution particulière suivante, qui représente l'équation de la figure acoustique pour le cas des plaques carrées; les axes sont parallèles aux côtés, et l'origine des coordonnées est au centre :

$$\sin h \frac{\pi x}{a} \sin k \frac{\pi y}{a} \pm \sin k \frac{\pi x}{a} \sin h \frac{\pi y}{a} = 0.$$

On peut écrire des cosinus à la place des sinus, ce qui revient à un déplacement de l'origine des coordonnées : a signifie le côté du carré; les paramètres h et k sont, en général, des nombres entiers. En désignant encore par e l'épaisseur de la plaque et par V la vitesse du son dans une verge de même substance, le nombre des vibrations doubles correspondant à la figure (h, k) sera

$$N = \frac{\pi}{8} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{V e}{a^2} (h^2 + k^2).$$

Pour le laiton, on a $V = 3600^m$, ce qui donne, pour une plaque de a décimètres de côté et de e millimètres d'épaisseur,

$$N = 173 \frac{e}{a^2} (h^2 + k^2).$$

Cette formule approchée se vérifie assez bien par l'expérience.

Voici, comme exemples de l'application de ces formules, les deux figures acoustiques (*fig.* 76 et 77), dont les équations sont respectivement

$$\sin 3\pi \frac{x}{a} \cos 4\pi \frac{y}{a} - \cos 4\pi \frac{x}{a} \sin 3\pi \frac{y}{a} = 0,$$

$$\sin 5\pi \frac{x}{a} \sin 9\pi \frac{y}{a} - \sin 9\pi \frac{x}{a} \sin 5\pi \frac{y}{a} = 0.$$

(1) LAGRANGE, *Œuvres*, t. 1^{er}.

Les notes théoriques seraient $9 + 16 = 25$ et $25 + 81 = 106$. M. Kœnig ⁽¹⁾ a trouvé, avec une plaque de 0^m,30 de côté et d'un peu moins de 0^m,002 d'épaisseur, un *sol*₁ et une note comprise entre *sol**₆ et *la*₆ (25 : 107).

Fig. 76.

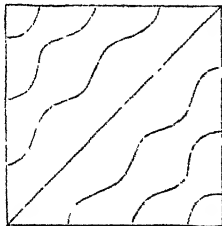
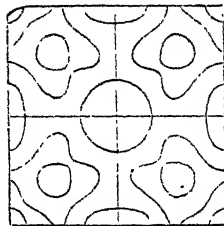


Fig. 77.



La loi générale qui lie les modes de division d'une plaque à la note qui leur correspond n'a guère été trouvée que pour les plaques circulaires, dont M. Kirchhoff ⁽²⁾ a donné la théorie complète. Elle fournit des résultats parfaitement d'accord avec les expériences antérieures de Chladni et de Strehlcke ⁽³⁾ sur le même sujet.

INTERFÉRENCE DES VIBRATIONS DE PÉRIODES INÉGALES.

Considérons deux corps vibrant à la fois, de façon que leurs mouvements se superposent ; soit $b : a$ le rapport, réduit à sa plus simple expression, de leurs nombres de vibrations, bn et an . Après un temps égal à $\frac{1}{n}$, ils auront fait l'un b , l'autre a vibrations ; ils se retrouveront dans la même situation qu'à l'origine ; par conséquent, leurs mouvements se retrouveront en accord ou en discordance après chaque période égale à $\frac{1}{n}$, et pendant une seconde il y aura n concordances et n discordances.

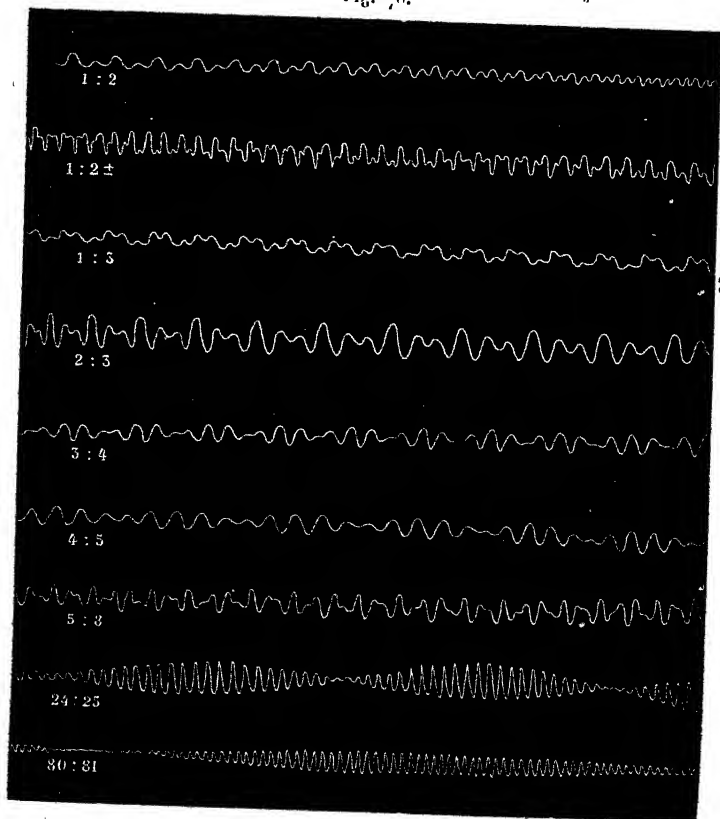
(1) KOENIG, *Ann. de Pogg.*, t. CXXII, p. 138 ; 1863.

(2) KIRCHHOFF, *Journal de Crelle*, t. XL. M. Émile Mathieu a fait la théorie des membranes elliptiques (*Journal de Liouville*, 2^e série, t. XIII et XIV).

(3) STREHLCKE, *Ann. de Pogg.*, t. IV, p. 205 ; t. XVIII, p. 198 ; 1837-1835.

Pour réaliser ces conditions, on place une lame de verre noircie sur l'une des branches d'un diapason fixe faisant an vibrations. Un autre diapason faisant bn vibrations porte à son extrémité une pointe qui appuie sur la lame de verre ; il glisse

Fig. 78.



le long d'une coulisse par l'effet d'un poids. Quand les deux appareils vibrent à la fois, la lame partage les mouvements du premier, la pointe ceux du second, et le tracé graphique est la somme de ceux qu'on obtiendrait séparément si la lame ou la pointe était immobile.

On voit dans la *fig.* 78 la combinaison de divers accords :

1^{re} Pour l'octave $b = 2a$, l'accord ou le désaccord se produit à chaque vibration successive de la note grave, et pour les vibrations prises de deux en deux de la note aiguë. La deuxième figure fait voir comment cet accord s'altère périodiquement si le rapport des deux notes n'est point absolument celui de l'octave. Dans la troisième ligne, le rapport $b : a$ est égal à 1 : 3; il y a trois vibrations de la note aiguë dans une du son grave, et le tracé paraît tremblé. Les autres tracés du Tableau s'expliquent avec la même facilité.

Considérons en particulier le cas où les deux notes sont très voisines, celui où leur rapport $\frac{b}{a}$ peut s'exprimer par deux nombres très grands qui diffèrent d'une unité, comme $\frac{25}{24}$, $\frac{81}{80}$.

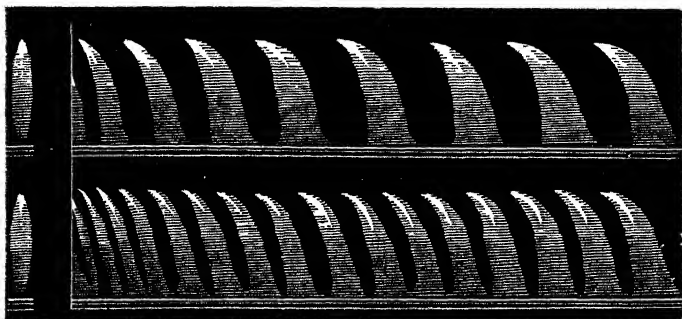
Dans ce cas particulier $b = a + 1$, les concordances se répètent toutes les fois que l'un des corps vibrants a fait a et l'autre $a + 1$ vibrations, et il y en a pendant une seconde un nombre $n = (b - a)n = bn - an$, c'est-à-dire qu'il y en a un nombre égal à la différence des nombres de vibrations des deux notes.

Puisque les deux notes diffèrent très peu, l'accord des deux vibrations superposées s'altérera peu pendant un certain temps, comme celui de deux pendules, de période presque égale; au voisinage d'une coïncidence s'établira une discordance progressive. Le tracé graphique se réduira à un nombre de vibrations apparentes égal à celui de la note la plus haute, mais alternativement grandes et courtes après chaque période égale à $b = a + 1$. On voit deux exemples de ces résultats dans les deux derniers tracés de la figure précédente, qui correspondent à la superposition de deux notes différant d'un demi-ton ou d'un comma.

On peut faire servir à la même étude les deux tuyaux placés sur le même sommier de la *fig.* 78. Supposons que l'un soit à l'octave de l'autre; la flamme qui lui correspond éprouvera deux fois plus de variations de longueur que la flamme de la note grave; elles seront alternativement concordantes et discordantes entre elles (*fig.* 79). Faisons maintenant traverser les capsules des deux tuyaux par un même courant de gaz ter-

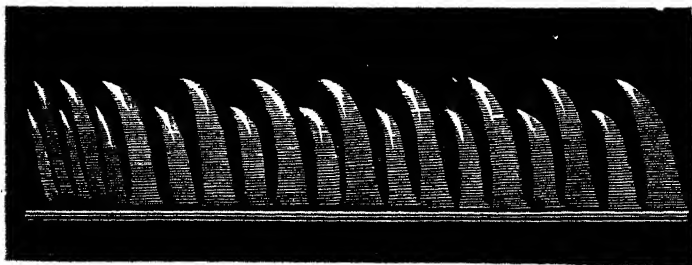
miné par une seule flamme : elle montrera dans le miroir tournant des images discontinues en nombre égal à celles de la note aiguë, grandes ou petites, au moment des concordances et des discordances (*fig. 80*).

Fig. 79.



Si le rapport des deux notes est égal à 4 : 5, on aura par la même raison cinq languettes (*fig. 81*), décroissant de la première à la moyenne, qui est la troisième, et augmentant à partir de la quatrième pour reprendre leur grandeur première

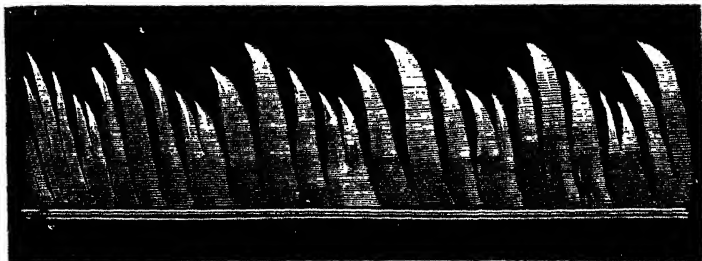
Fig. 80.



à la sixième et recommencer les mêmes variations. Dans ce nouveau mode d'expériences, dû à M. Kœnig (¹), la longueur des flammes exprime la grandeur des vibrations superposées.

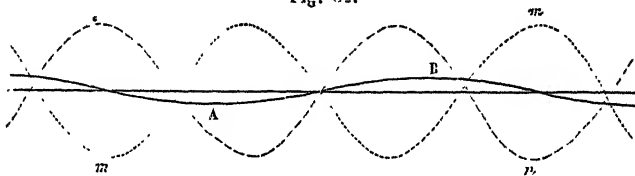
Les deux sons se propagent dans l'air comme s'ils étaient seuls, et la vitesse imprimée à chaque couche d'air est repré-

Fig. 81.



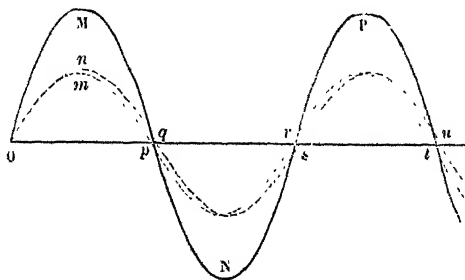
sentée par une courbe dont les ordonnées sont égales à la somme algébrique de celles qui expriment les deux sons com-

Fig. 82.



posants, et qui sont représentées par des courbes ponctuées. Comme les deux longueurs d'onde sont presque égales, les vi-

Fig. 83.



tesse figurées par les courbes ponctuées *nn* et *mm* sont discordantes, se détruisent presque complètement pendant

plusieurs vibrations consécutives et se réduisent à la courbe pleine AB (*fig. 82*); puis elles deviennent concordantes et s'ajoutent pendant une durée égale (*fig. 83*).

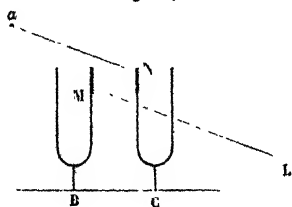
BATTEMENTS. — Il en résulte une courbe composée où l'on remarque des vitesses maxima et minima. Ces alternatives se reproduisent $M - N$ fois en une seconde, si M et N sont les nombres des vibrations complètes des deux notes; elles produisent des renforcements et des affaiblissements du son. C'est le phénomène des battements, que Sauveur ⁽¹⁾ a étudié le premier. Ces battements sont très rapprochés ou très lents, suivant que les deux notes composantes diffèrent beaucoup ou peu. On les obtient facilement avec deux tuyaux identiques que l'on désaccorde en diminuant légèrement la longueur de l'un, ou avec deux diapasons, ou avec la sirène double, en superposant les notes produites par les deux séries de douze trous, et en tournant la roue dentée de manière à varier les phases des deux sons. La formule

$$\sin 2\pi M t + \sin 2\pi N t = 2 \cos \pi (M - N) t \sin 2\pi \frac{M + N}{2} t$$

exprime le phénomène des battements dans le cas le plus simple de deux sons de même intensité et de même phase; on voit qu'il y a $M - N$ minima et maxima par seconde.

On peut rendre sensibles à l'œil ces renforcements et ces affaiblissements des vibrations superposées. Soient deux dia-

Fig. 84.



pasons MB et NC (*fig. 84*) sur les branches intérieures desquels on a fixé deux miroirs M et N. L'œil placé en a voit par double réflexion l'image du point L suivant la direction aN . Quand le diapason MB entre en vibration, l'image de L est déplacée dans le sens vertical, et, à cause de la

persistance des impressions, elle paraît être une ligne allongée. Il en est de même quand c'est le diapason NC qui est en

(1) SAUVEUR, *Histoire de l'Académie des Sciences*, p. 134; 1700.

mouvement. Mais, si on les ébranle tous les deux à la fois, il pourra arriver : 1° que le miroir N reste à chaque instant parallèle à M, c'est-à-dire que les deux vibrations aient la même phase et la même amplitude : dans ce cas, l'image ne s'allongera pas, 2° que le miroir N vibre à chaque instant en sens contraire de M : alors la différence de phase sera égale à une demi-longueur d'onde, et le déplacement de l'image sera la somme de ceux qu'elle éprouverait par le mouvement de chaque miroir ; 3° enfin il peut arriver que les deux diapasons oscillent avec des amplitudes égales et avec une différence de phase quelconque, et l'image subira une élongation, mais plus petite que dans le deuxième cas. Ainsi, lorsqu'à l'origine du mouvement les deux diapasons à l'unisson auront été mis fortuitement dans un état déterminé de phase, cet état se maintiendra indéfiniment, et l'image sera ou un point ou une ligne dont la longueur dépendra uniquement de cette phase, pour une amplitude vibratoire égale.

Mais, si l'on ajoute au diapason NC un contrepoids même très petit, ses vibrations deviendront un peu moins rapides que celles de l'autre diapason MB ; alors, à partir d'un moment où les deux miroirs seront parallèles, M prendra l'avance ; la différence de phase, d'abord nulle, ira en augmentant, elle deviendra $\frac{\lambda}{2}$, puis λ , etc., et par conséquent l'image, d'abord réduite à un point, s'allongera, puis se raccourcira, etc. ; et, comme il y aura aussi des battements quand les vibrations seront concordantes, les alternatives de raccourcissement et l'allongement coïncideront avec celles des affaiblissements et des renforcements du son. On conçoit que les diapasons ne seront parfaitement d'accord que lorsque ces alternatives auront disparu.

On peut aussi rendre les battements visibles au moyen de l'appareil à flammes déjà cité (*fig.* 68), en désaccordant légèrement l'un des deux tuyaux qui parlent à la fois et en faisant communiquer les deux capsules avec un même courant de gaz terminé à un seul bec où on l'allume. On observe alors la flamme *directement*, sans le secours du miroir tournant, on la voit s'élancer et s'abaisser tour à tour d'une manière

périodique, et le rythme de ses mouvements concorder avec celui des battements.

Sauveur a proposé de faire servir la théorie des battements à la mesure des nombres absolus de vibrations de deux sons, lorsqu'ils donnent des battements assez lents pour qu'on puisse les compter et lorsqu'on connaît leur rapport $\frac{b}{a}$, qui peut se déterminer de plusieurs manières. S'il y a n battements par seconde, cela veut dire que la différence entre les deux nombres de vibrations N et M est égal à n . On a donc les deux équations

$$\frac{M}{N} = \frac{b}{a}, \quad M - N = n;$$

donc

$$N = \frac{na}{b-a}, \quad M = \frac{nb}{b-a}.$$

Supposons, par exemple, qu'on ait fait écrire les vibrations de deux diapasons ou de deux corps vibrants quelconques, placés l'un à côté de l'autre, sur le cylindre noirci, et qu'on ait trouvé que l'un fait a vibrations pendant que l'autre en fait $a + 1$: on aura leurs nombres de vibrations absolues en multipliant a et $a + 1$ par le nombre n de battements qu'ils donnent par seconde; on trouvera ainsi pour l'un an et pour l'autre $an + n$ vibrations doubles.

Scheibler (¹), de Crefeld, a étendu notablement l'emploi des battements à l'art d'accorder les orgues. Il a construit une série de 65 diapasons appelée par lui *tonomètre*. Le premier fait 256 vibrations; les autres se succèdent de façon que chacun d'eux donne 4 battements par seconde avec celui qui le précède et avec celui qui le suit, ce qui veut dire que le nombre des vibrations augmente de 4 à chacun d'eux et de $4.64 = 256$ du premier au dernier, ce qui fait une octave entière. Tout son qui sera compris dans la même octave se placera entre deux de ces diapasons; il fera, par exemple, 3 battements avec le plus bas et 1 avec le plus haut : il fera 3 vibrations de plus

(¹) SCHEIBLER, *Ann. de Pogg.*, t. XXIX, p. 390, et t. XXXII, p. 333 et 492; 1833-1834.

que le premier et 1 de moins que le second. On a supposé ici que la note en question est comprise dans les limites du tonomètre; si elle n'y était pas, on l'élèverait ou on l'abaisserait d'une ou de plusieurs octaves jusqu'à la ramener entre ces limites.

Les battements de deux diapasons permettent encore de constater l'influence du mouvement de translation sur la hauteur d'un son. Supposons que l'un fasse 512, l'autre 516 vibrations par seconde; immobiles, ils donneront 4 battements. Laissons le premier en place, rapprochons l'autre de l'oreille. il paraîtra plus aigu qu'il ne l'est en réalité, et le nombre des battements devra croître; il diminuera, au contraire, si l'on éloigne le deuxième diapason. Si le premier est à 65^{cm} de l'oreille (c'est la longueur d'onde qui correspond à 512 vibrations) et qu'on promène l'autre entre l'oreille et le premier diapason dans le rythme régulier d'un pendule à secondes, on perd toujours 1 battement pendant l'allée et l'on en gagne 1 pendant le retour, de sorte qu'on entend alternativement 3 et 5 battements par seconde au lieu d'en entendre toujours 4. Cette expérience est due à M. Kœnig.

SONS DE BATTEMENTS, SONS RÉSULTANTS. — Le nombre de battements par seconde $M - N$ augmente à mesure que les notes qu'on produit à la fois s'éloignent davantage. Il y a un moment où ces battements cessent d'être distincts; mais on entend alors un son continu dont le nombre des vibrations est $M - N$. Il se produit lorsqu'on fait parler à la fois deux tuyaux ou deux diapasons; on le nomme *son résultant*. Il a été signalé en 1745 par Sorge (¹), et un peu plus tard par Romieu (²), de Montpellier, et par Tartini (³). Les sons résultants ont été surtout étudiés par M. Helmholtz et par M. Kœnig.

D'après M. Kœnig (⁴), il y a deux sortes de *sons de batte-*

(¹) SORGE, *Anweisung zur Stimmung der Orgelwerke und des Claviers*. Hambourg, 1744.

(²) ROMIEU, membre de l'Académie des Sciences de Montpellier, 1753.

(³) TARTINI, *Traité de l'Harmonie*; Padoue, 1754.

(⁴) R. KOENIG, *Quelques expériences d'acoustique*, t. IX, p. 87 et suiv. Paris, 1832.

ments a dont on constate l'existence de la manière suivante :

Un diapason de grandes dimensions donnant la note *ut*, est mis en vibration simultanément avec un autre gros diapason donnant successivement *ré*, *mi*, etc., ou des notes intermédiaires. On entend d'abord des battements distincts dont le nombre est $M - N$; quand ces battements sont au nombre de 13 ou 14 par seconde, ils se confondent en une sorte de roulement qui s'accélère de plus en plus à mesure qu'on s'approche de l'intervalle de quarte, mais sans perdre son caractère simple. Au-dessus on n'entend plus qu'un ronflement confus; mais quand on s'approche de l'octave $2N$, les battements reparais-sent bien distincts et leur nombre est cette fois $2N - M$ jusqu'à l'octave où ils disparaissent complètement.

En continuant encore d'élever le son du second diapason au-dessus de $2N$, on entend des battements en nombre de $M - 2N$; puis, au voisinage de la quinte de l'octave, apparaissent les battements $3N - M$, suivis, après la quinte, des battements $M - 3N$ et ainsi de suite.

Deux sons de battements peuvent battre à leur tour, l'un par rapport à l'autre, en donnant des battements secondaires plus difficilement perceptibles, et l'on peut comprendre que, par la répétition indéfinie des mêmes procédés de composition, deux sons simples pourraient donner une série illimitée de sons de battement d'intensité décroissante.

M. Helmholtz ⁽¹⁾, étudiant théoriquement la composition de mouvements vibratoires d'*amplitude finie*, est arrivé à prévoir des sons résultants d'une autre espèce, correspondant au nombre de vibrations $M + N$, et qu'on peut nommer *sons résultants additionnels*. M. Helmholtz a constaté par l'expérience l'existence de ces sons, d'après lui beaucoup plus faibles que les sons $M - N$.

Quand les deux notes primaires sont assez fortes, on entendrait encore d'autres sons accessoires ou sons résultants de second ordre, qui seraient produits par la combinaison des sons résultants de premier ordre avec les deux notes primaires.

(¹) HELMHOLTZ, *Théorie physiologique de la Musique*, p. 300 de l'édition française.

Ainsi les notes M, N donneraient les sons résultants de premier ordre $M - N$, $M + N$, et les sons résultants de second ordre $M - 2N$, $2M - N$, $2M + N$, $M + 2N$. On observerait même quelquefois des sons résultants de troisième ordre, etc. Prenons pour exemple les deux notes ut_3 et mi_3 , qui forment une tierce majeure, et que nous représenterons par 4 et 5. Le son différentiel sera 1, le son d'addition 9. Le premier est donc l' ut_1 , l'autre le $ré_1$. Le son 1 donnera avec 4 et 5 les sons différentiels de second ordre 3 et 4, c'est-à-dire sol_2 et ut_3 ; le son 3 donnera avec 4 et 5 les sons différentiels de troisième ordre 1 et 2 (ut_1 et ut_2), et ainsi de suite.

En résumé, on devra entendre à la fois

$$\begin{array}{ccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 9 \\ \text{ou} & & & & & \\ ut_1, & ut_2, & sol_2, & ut_3, & mi_3, & ré_4. \end{array}$$

D'après M. Kœnig, toutes les expériences réalisées par M. Helmholtz sont sujettes à critique, les sons employés n'étant pas des sons rigoureusement simples comme ceux des diapasons. Les sons d'addition n'auraient jamais été constatés expérimentalement d'une manière bien certaine.

SONS DE VARIATION. — Comme deux sons M, N donnent $M - N$ battements par seconde, c'est-à-dire un son $\frac{M + N}{2}$ dont l'intensité offre $M - N$ minima par seconde, un son d'intensité périodiquement variable se décompose à son tour en deux sons d'intensité constante. En effet, soient h la hauteur de ce son et $2p$ le nombre des minima d'intensité qu'il offre en une seconde; on pourra le représenter par

$$\alpha \cos 2\pi p t \sin 2\pi h t = \frac{\alpha}{2} \sin 2\pi(h + p)t + \frac{\alpha}{2} \sin 2\pi(h - p)t.$$

On voit donc qu'il se décompose en deux sons $h + p$ et $h - p$, qui donnent entre eux $2p$ battements, et qu'on pourrait appeler *sons de variation*. M. Radau a fait voir que ce phénomène doit s'observer lorsqu'on fait tourner rapidement le carton évidé sur la plaque circulaire dans l'expérience de Lissa-

jous. Si la plaque vibre avec $2n$ concamérations en donnant la note h et si l'on fait tourner le carton avec une vitesse de n' tours par seconde, on a $2p = 2nn'$, et les sons de variation seront $h + nn'$ et $h - nn'$. On obtient le même résultat avec une plaque que l'on fait simplement tourner dans son plan, parce que les secteurs négatifs et positifs passent alors alternativement au même point. M. Beetz (1) a vérifié ces conclusions avec une plaque qui donnait le *fa* de 340 vibrations lorsqu'elle se divisait en quatre secteurs. Il lui imprimait $19\frac{1}{2}$ tours par seconde; on avait donc

$$\begin{aligned} h &= 340, & 2n &= 4, & n' &= 19,5, \\ h + nn' &= 379, & h - nn' &= 301. \end{aligned}$$

Les sons observés étaient le *sol* de 380 et le *mi*^b de 300 vibrations.

THÉORÈME DE FOURIER (2). — Jusqu'ici nous n'avons considéré que des vibrations harmoniques, ou bien des vibrations résultant de la superposition de plusieurs vibrations parallèles de cette espèce. Il convient d'écarter désormais ce que cette condition imposée aux vibrations sonores a de restrictif en apparence, et de montrer que toute vibration rectiligne peut être considérée comme le résultat d'une pareille superposition.

Concevons, en effet, qu'un point matériel vibre d'après une loi quelconque, c'est-à-dire que l'élongation s soit une fonction du temps t , arbitrairement donnée et astreinte seulement à repasser par les mêmes valeurs au bout d'une période complète, de telle sorte que, en appelant T la durée de la période, s ne change pas de valeur quand on y remplace t par $t + T$.

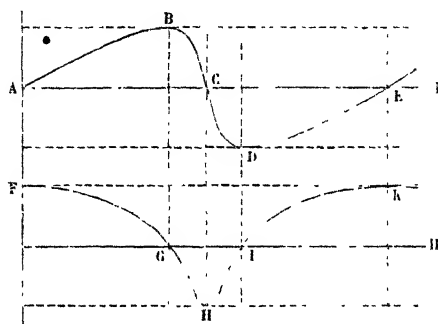
On peut figurer un mouvement de cette espèce d'après les mêmes conventions qui nous ont servi précédemment. La courbe des élongations sera composée (fig. 85) d'une série de portions telles que ABCD toutes identiques entre elles; on l'obtiendra en transportant la tranche ABCDE bout pour bout un nombre indéfini de fois. La longueur AE interceptée sur l'axe par cette portion de courbe est égale à T .

(1) BEETZ, *Ann. de Pogg.*, t. CXXX, p. 313 et 587; 1857.

(2) FOURIER, *Théorie analytique de la chaleur*; Paris, 1821.

La courbe des vitesses **FGHIJ** présente une autre forme que celle des élongations, mais avec la même période.

Fig. 85.



Il est évident que la fonction

$$(1) \quad s = - \left[a_1 \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \delta_1 \right) + a_2 \cos 4\pi \left(\frac{t}{T} - \delta_2 \right) + \dots \right],$$

dans laquelle les coefficients $a_1, a_2, \dots, \delta_1, \delta_2$, en nombre fini ou infini, sont des constantes, jouit de la propriété d'avoir une période égale à T .

Fourier a démontré que toute fonction périodique peut précisément être mise sous cette forme et que le développement de s est possible d'une manière, et d'une seule. Le nombre des termes nécessaires pour représenter rigoureusement la vibration est en général infini; mais presque toujours les constantes a_1, a_2, \dots sont assez rapidement décroissantes pour qu'on puisse réduire le développement de s à un petit nombre de termes.

En différenciant (1) par rapport à t , on obtient

$$\frac{ds}{dt} = v = \frac{2\pi a_1}{T} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \delta_1 \right) + \frac{4\pi a_2}{T} \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} - \delta_2 \right) + \dots,$$

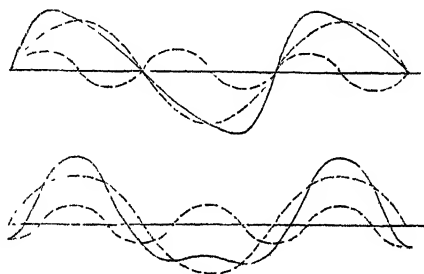
que nous écrirons, pour abrégér,

$$(2) \quad v = \alpha_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \delta_1 \right) + \alpha_2 \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} - \delta_2 \right) + \dots$$

On remarquera que chacun des termes des équations (1) et (2) définit séparément une vibration harmonique de période T , $\frac{T}{2}$, $\frac{T}{3}$, ...; les sons correspondants contiennent N , $2N$, $3N$, ... vibrations par seconde : ce sont ceux que peuvent émettre, suivant le nombre de concamérations dans lesquelles ils se divisent, un tuyau ouvert aux deux bouts, une corde fixée à ses deux extrémités, etc.

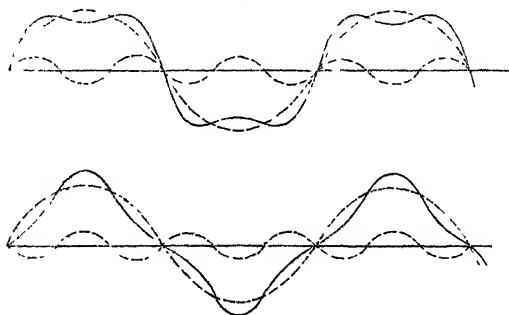
Pour nous familiariser avec le mode d'analyse ou de synthèse des sons renfermé dans la formule de Fourier, nous re-

Fig. 86.



produirons ici les figures correspondant à la superposition de deux vibrations harmoniques de périodes respectivement égales

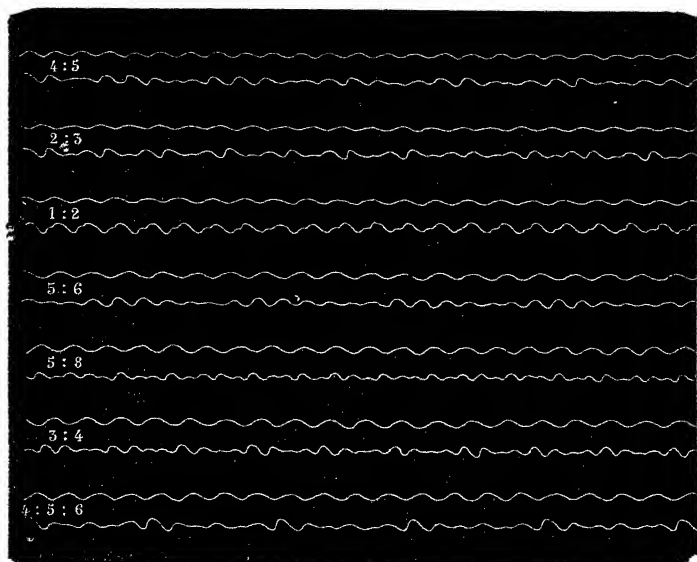
Fig. 87.



à T et $\frac{T}{2}$ (fig. 86), T et $\frac{T}{3}$ (fig. 87). Ces figures supposent que

COMPOSITION DES MOUVEMENTS VIBRATOIRES. 145
 la vibration à courte période présente sur l'autre des retards
 égaux respectivement à 0 et à $\frac{T}{4}$, 0 et $\frac{T}{6}$. La *fig. 88* montre le
 resultat de superpositions plus complexes : la première ligne

Fig. 88.



de chaque tracé représente le son le plus grave, la deuxième
 sa superposition avec un ou plusieurs de ses harmoniques.

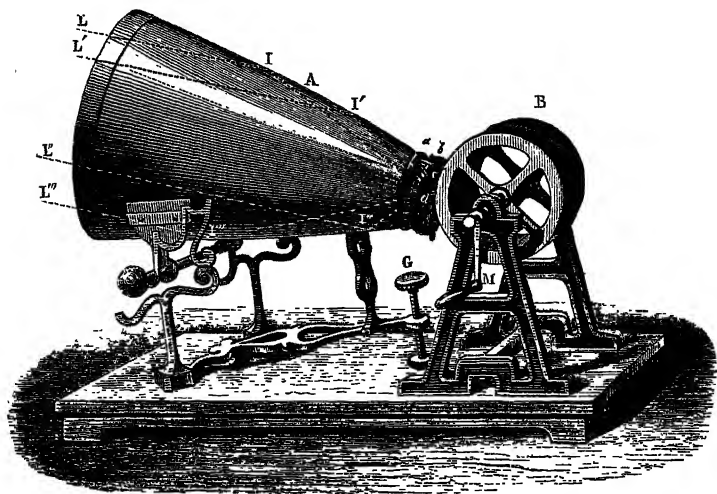
PHONAUTOGAPHE. — Non seulement on peut prévoir des
 tracés graphiques, mais on peut aussi les dessiner automati-
 quement. On emploie à cet effet le phonautographe de Scott.
 Tel qu'il a été construit par M. Kœnig ⁽¹⁾, cet instrument se
 compose d'un parabolôïde en tôle de zinc A (*fig. 89*), terminé
 par un anneau *a* sur lequel un second anneau *b* maintient
 tendue une membrane très mince. Une pièce mobile *c*, qui
 par une pointe appuie sur la membrane, sert à en modifier con-

⁽¹⁾ *Annales du Conservatoire des Arts et Métiers*, oct. 1864.

J. et B., *Acoustique*. — III (4^e édit., 1886). 1^{er} fasc.

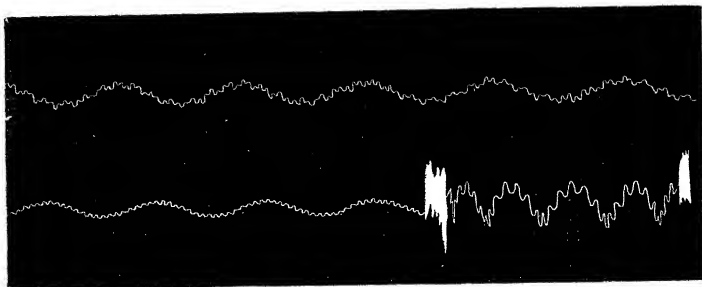
venablement la tension. Le style *d*, formé d'une soie de sanglier et terminé par une barbule de plume, est fixé sur la membrane avec une goutte de cire d'Espagne. Il appuie sur un

Fig. 89.



cylindre B, recouvert d'une feuille de papier noircie à la flamme d'une lampe à huile, et porté sur un support solide par une

Fig. 90.



vis sans fin. Le style entre en vibration aussitôt qu'un son quelconque est produit dans le voisinage du paraboloïde, qui le concentre en son foyer, comme l'indiquent les lignes brisées

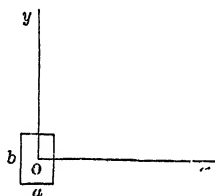
LI, L'I', L''I'', . . . , et communique l'impulsion à la membrane; il suffit alors de faire tourner le cylindre au moyen de la manivelle M pour obtenir, sur le papier enduit de noir de fumée, une hélice tremblée qui représente les vibrations de l'air. On coupe ensuite la feuille de papier suivant une ligne parallèle à l'axe du cylindre, on l'enlève et on la trempe dans un bain d'alcool, afin de fixer le dessin qu'elle porte. La *fig. 90* est un exemple des dessins qu'on obtient lorsque plusieurs sons se superposent.

Quand on produit devant le paraboloïde deux notes simples d'une même série harmonique, on constate l'accord du tracé obtenu avec celui que la théorie fait prévoir.

* COMPOSITION DES VIBRATIONS RECTANGULAIRES.

* Supposons qu'un même point O (*fig. 91*) soit sollicité à la fois par deux systèmes de mouvements vibratoires rectangu-

Fig. 91.



lares dirigés suivant Ox et Oy , ayant des amplitudes, des phases et des durées de vibration quelconques, que nous pouvons représenter par les formules

$$v = \frac{dy}{dt} = \alpha \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$v' = \frac{dx}{dt} = \alpha' \sin 2\pi \left(\frac{T'}{t} + \delta \right).$$

En intégrant et posant $a = -\frac{\alpha T}{2\pi}$, $a' = -\frac{\alpha' T'}{2\pi}$, on a

$$(1) \quad y = a \cos 2\pi \frac{t}{T}, \quad x = a' \cos 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \delta \right);$$

y et x représentent les coordonnées du point vibrant après un temps t , et, si nous éliminons t entre les deux équations (1), nous aurons celle de la trajectoire décrite par le point O. Cette élimination est très compliquée dans le cas général; elle se fait facilement dans divers cas particuliers.

1° Supposons que T' soit égal à T ; nous aurons

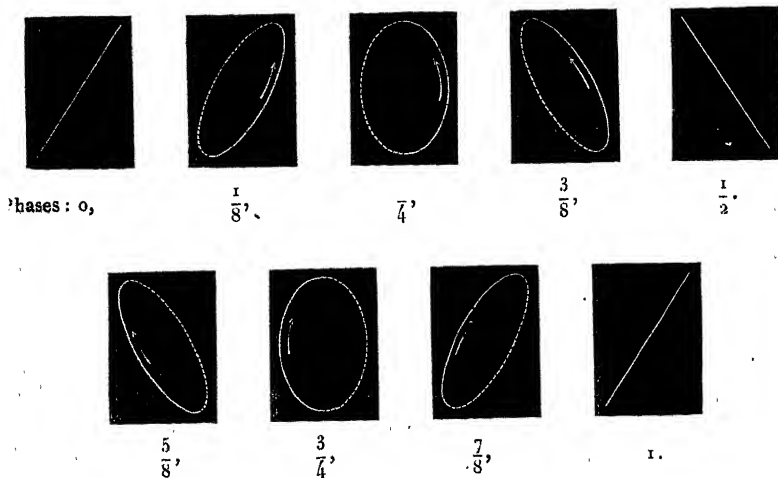
$$x = a' \cos 2\pi\delta \cos 2\pi \frac{t}{T} - a' \sin 2\pi\delta \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$x = a' \cos 2\pi\delta \frac{y}{a} - a' \sin 2\pi\delta \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}},$$

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{2xy}{aa'} \cos 2\pi\delta = \sin^2 2\pi\delta,$$

ce qui est l'équation d'une ellipse qui prend successivement les formes et les positions indiquées (fig. 92) quand la diffé-

Fig. 92 (unisson, 1 : 1).



rence de marche prend successivement les valeurs 0, $\frac{\lambda}{8}$, $\frac{\lambda}{4}$, $\frac{3\lambda}{8}$, $\frac{\lambda}{2}$, $\frac{5\lambda}{8}$, $\frac{3\lambda}{4}$, $\frac{7\lambda}{8}$, λ .

2° Soit maintenant $T = 2T'$; nous aurons

$$x = a' \cos 2\pi\delta \cos 2\pi \frac{t}{T} - a' \sin 2\pi\delta \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$x = a' \cos^2 2\pi\delta \left(\cos^2 2\pi \frac{t}{T} - \sin^2 2\pi \frac{t}{T} \right) \\ - 2a' \sin 2\pi\delta \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

$$x = a' \cos 2\pi\delta \left(2 \frac{y^2}{a^2} - 1 \right) - 2a' \sin 2\pi\delta \frac{y}{a} \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}.$$

En faisant disparaître le radical et réduisant,

$$(2) \frac{x^2}{a'^2} + \frac{4y^4}{a^4} - \frac{4y^2}{a^2} \left(1 + \frac{x \cos 2\pi\delta}{a'} \right) + \frac{2x}{a'} \cos 2\pi\delta + \cos^2 2\pi\delta = 0,$$

équation facile à discuter et qui exprime les courbes de la fig. 93.

Fig. 93 (octave, 1 : 2).



es : 0,



$\frac{1}{8}$,



$\frac{1}{4}$,



$\frac{3}{8}$,



$\frac{1}{2}$.

La courbe est comprise dans un rectangle dont les côtés sont $2a$ et $2a'$. En général, si le rapport de T à T' est égal à $\frac{p}{q}$, le nombre de ses points de contact avec les côtés est égal à p pour le premier et à q pour le second, pourvu qu'on suppose p et q premiers entre eux.

En effet, les équations (1) montrent : 1° que les valeurs maxima de y et de x sont comprises entre $+a$ et $-a$ d'une part, et $+a'$ et $-a'$ de l'autre. La courbe est donc tangente aux côtés du rectangle formé par les lignes $y = +a$, $y = -a$, et $x = +a'$, $x = -a'$. De plus, y rencontre les deux premières

lignes un nombre de fois égal à $\frac{1}{T}$ pendant une seconde, et x

touche les deux autres $\frac{1}{T'}$ fois dans le même temps. Le rapport

de $\frac{1}{T}$ à $\frac{1}{T'}$ est celui des nombres de vibrations; il est égal à $\frac{p}{q}$.

Il y a donc, pendant le même temps, p contacts avec les côtés horizontaux et q avec les côtés verticaux. Si, par exemple,

l'intervalle des deux notes est une quarte, $\frac{p}{q} = \frac{3}{4}$, la courbe

touche 3 fois les côtés horizontaux et 4 fois les côtés verticaux des rectangles dans lesquels la figure est contenue.

La fig. 94 représente les courbes qui caractérisent le rap-

Fig. 94 (quinte d'octave, 1 : 3).



Phases : 0,

$\frac{1}{8}$,

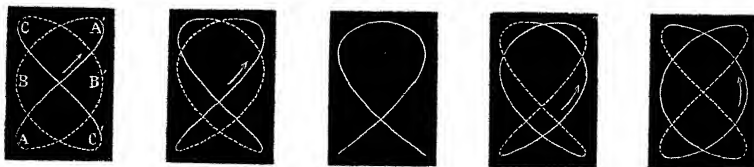
$\frac{1}{4}$,

$\frac{3}{8}$,

$\frac{1}{2}$.

port de la douzième ou quinte de l'octave $\left(\frac{p}{q} = \frac{1}{3}\right)$, la fig. 95

Fig. 95 (quinte, 2 : 3).



Phases : 0,

$\frac{1}{6}$,

$\frac{1}{8}$,

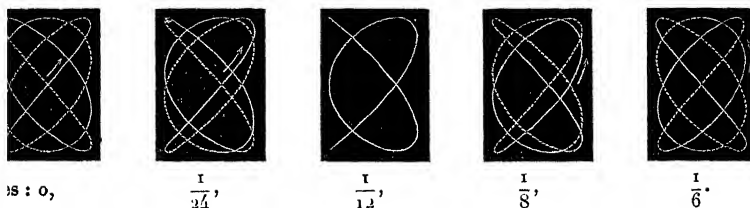
$\frac{3}{6}$,

$\frac{1}{4}$.

celles qui correspondent à la quinte $\left(\frac{p}{q} = \frac{2}{3}\right)$, et la fig. 96

celles de la quarte ($\frac{p}{q} = \frac{3}{4}$). Les différences de phase sont marquées au-dessous de chaque courbe.

Fig. 96 (quarte, 3 : 4).



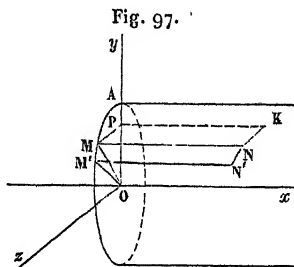
DISCUSSION GÉOMÉTRIQUE. — On doit à Lissajous ⁽¹⁾ la discussion géométrique suivante. Traçons (fig. 97) un cylindre dont l'axe est Ox et le rayon a , et supposons qu'un point M se meuve sur la section droite yz avec une vitesse constante égale à $\frac{2\pi a}{T}$. Après un temps t il aura parcouru un espace AM égal à $\frac{2\pi at}{T}$; la projection OP de OM sera égale à $a \cos MOA$, et l'on aura

$$y = a \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

La projection du point M sur l'axe Oy décrira donc l'une des deux vibrations composantes.

Imaginons maintenant une génératrice MN se mouvant avec M , et prenons sur elle une longueur MN égale à la valeur de x pour le temps t . Le point N décrira sur la surface du cylindre une courbe sinusoïdale. D'autre part, la projection K du point N sur le plan des xy donnera

$$PK = x = a' \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$



(1) LISSAJOUS, *Annales de Chimie et de Physique*, 3^e série, t. II, p. 147 et

Par conséquent, K décrira dans le plan des xy la courbe que nous cherchons, et celle-ci sera la projection de celle que N trace sur la surface cylindrique. La première sera la perspective de la seconde vue d'un point infiniment éloigné sur l'axe Oz. Il suffit donc de trouver la courbe du point N (¹).

Je suppose que la phase δ change, par exemple qu'elle croisse de zéro à δ ; la valeur de y passera de

$$y = a \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad \text{à} \quad y = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right).$$

(¹) Il est facile de tracer celle-ci sur la surface cylindrique développée. Elle ne comprend que des arcs de sinusoïde. En effet, éliminons t entre les équations

$$y = \frac{2\pi a t}{T},$$

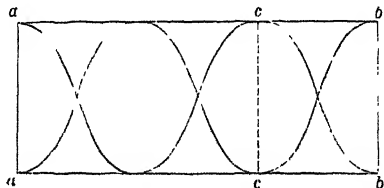
$$x = a' \cos 2\pi \frac{t}{T};$$

nous obtenons

$$x = a' \cos \frac{T}{T'a} y.$$

La période ac de cette sinusoïde (fig. 98) est $\frac{2\pi a T'}{T}$; la portion contenue dans la largeur $2\pi a$ du développement ne contient pas en général un nombre entier de périodes; pour obtenir sur le cylindre une courbe fermée, il faut continuer la courbe en revenant de b' en a' autant de fois qu'il est nécessaire

Fig. 98.



pour obtenir un nombre entier de périodes embrassant un nombre entier de fois le développement $2\pi a$. Alors les points extrêmes a et b se rejoignent sur le cylindre, et la courbe cylindrique est fermée.

La figure ci-jointe se rapporte à $\frac{T'}{T} = \frac{2}{3}$.

M. Terquem (*Séances de la Société de Physique*, 1876, p. 102) a eu l'idée

La dernière équation peut s'écrire

$$y = a \cos 2\pi \left(\frac{t + T\delta}{T} \right).$$

En augmentant la phase de δ , c'est comme si le temps avait augmenté de $T\delta$, ou que le point M et toute la courbe tracée sur le cylindre eussent marché d'une quantité

$$MM' = \frac{2\pi a}{T} T\delta = 2\pi a\delta,$$

c'est-à-dire d'une fraction de circonférence égale à la phase. C'est comme si le cylindre avait tourné d'un angle égal à MOM' ; on aura donc toutes les perspectives de la courbe cylindrique pour des phases égales à $0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \dots, \frac{8}{8}$, en faisant tourner le cylindre d'une fraction égale de circonférence. Cela étant, la question se simplifie; il suffira de construire la courbe cylindrique pour une valeur particulière de δ , par exemple pour le cas où $\delta = 0$. Examinons ce qui arrive quand les deux vibrations composantes sont dans un rapport simple.

1° $T = T'$: on a

$$y = a \cos 2\pi \frac{t}{T}, \quad x = a' \cos 2\pi \frac{t}{T};$$

de découper ces courbes dans une feuille de tôle qu'il enroule ensuite sur une surface cylindrique, de manière à en rejoindre les deux extrémités aa' , bb' . Les modèles opaques ainsi obtenus (fig. 99 et 100) peuvent être éclairés par

Fig. 99.

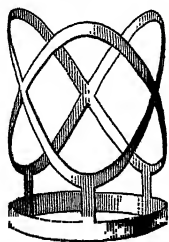
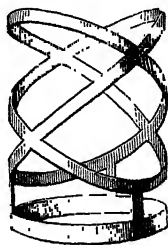


Fig. 100.



de la lumière parallèle; l'ombre portée sur un tableau plan fournit en projection les diverses courbes caractéristiques de l'intervalle considéré.

par conséquent

$$\frac{y}{x} = \frac{a}{a'}.$$

Cela prouve que la courbe est une section plane du cylindre, c'est-à-dire une ellipse. Pour $\delta = 0$, sa perspective est une droite $y = \frac{a}{a'}x$; quand la phase augmente, la courbe prend les aspects de la *fig. 92*.

2° $T = 2T'$:

$$y = a \cos 2\pi \frac{t}{T}, \quad x = a' \cos 2\pi \frac{2t}{T}.$$

Si t croît de 0 à T , y passe de $+a$ à $-a$, le point M a fait une fois le tour du cylindre. D'autre part, la valeur de x passe de $+a' \cos 2\pi(0)$ à $+a' \cos 2\pi(2)$, c'est-à-dire qu'elle passe deux fois de $+a'$ à $-a'$; elle reprend donc à la fin la valeur qu'elle avait à l'origine. Par conséquent, la courbe revient au point de départ et se superpose ensuite indéfiniment à elle-même après que x a décrit deux vibrations complètes, l'une $ABQCD$ à la partie antérieure du cylindre, l'autre $DC'QB'A$ qu'on a ponctuée, et qui est à la partie postérieure (*fig. 93*). La phase croissant, les aspects changent, comme l'indique la figure.

3° $2T = 3T'$:

$$y = a \cos 2\pi \frac{t}{T}, \quad x = a' \cos 2\pi \frac{3t}{T}.$$

Quand M a fait un tour, y et x reprennent leurs premières valeurs $+a$ et $+a'$.

Le rapport de ces nombres est celui des côtés du rectangle, car $2\pi \frac{3t}{T}$ s'est accru de trois circonférences et x a fait trois vibrations complètes (*fig. 94*).

4° $2T = 3T'$:

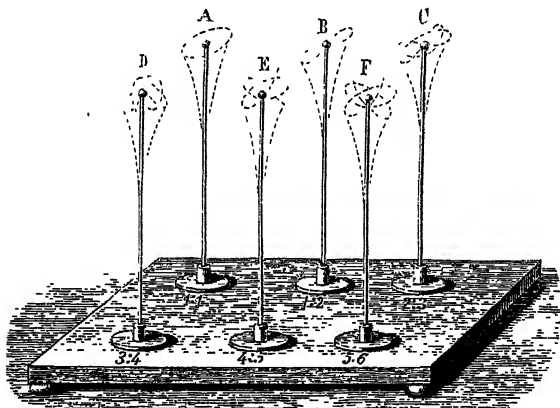
$$y = a \cos 2\pi \frac{t}{T}, \quad x = a' \cos 2\pi \frac{3t}{2T}.$$

On fait croître t de 0 à $2T$ (*fig. 95*); M fait deux fois le tour

du cylindre et y reprend la valeur $+a$ qu'il avait pour $t=0$. Pendant ce temps, x passe de $+a'$ à $-a'$ et fait trois vibrations complètes, l'une AA'B, la seconde BC'C, la troisième CB'A. On discuterait et on figurerait de même les autres cas.

GALÉIDOPHONE. — Jusqu'à présent cette étude est purement théorique. Occupons-nous maintenant des phénomènes. C'est Wheatstone ⁽¹⁾ qui les a découverts et expliqués le premier en 1827. Il se servait de verges de longueur l dont la section OBA (fig. 91) était un rectangle de base a et de hauteur a' . En

Fig. 101.



les faisant vibrer dans le sens Oy , elles donnaient un nombre de vibrations $\frac{Ka'}{l^2}$ et $\frac{Ka}{l^2}$ quand elles étaient ébranlées parallèlement à Ox .

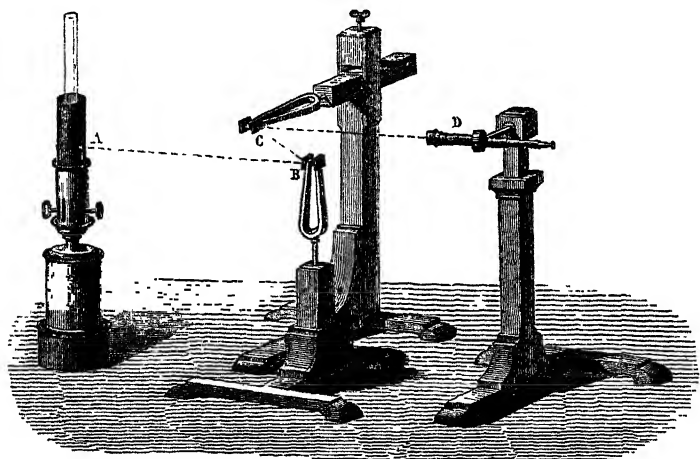
En déplaçant la verge par des chocs donnés obliquement, elle éprouvait à la fois les deux modes de mouvement précédents, et son extrémité décrivait les courbes que nous venons d'étudier, quand a et a' prenaient les valeurs que nous leur avons assignées. Pour les rendre visibles, Wheatstone fixait à cette extrémité une sphère de verre étamé qu'il éclair-

(¹) WHEATSTONE, *Quarterly Journal of Science*, new series, n° 11.

rait par une lampe, et, comme elle offre toujours un point brillant, la courbe qu'elle décrit se dessine par un trait lumineux qui paraît continu à cause de la persistance des impressions. Wheatstone a donné à cet appareil le nom de *caléidophone* (*fig. 101*).

MÉTHODE OPTIQUE. — Lissajous ⁽¹⁾ a réalisé les mêmes courbes avec plus d'éclat et de précision. Il place en regard l'un de l'autre deux diapasons B et C (*fig. 102*), qui portent

Fig. 102.



chacun deux miroirs sensiblement parallèles et qui vibrent, B dans un plan vertical et C dans un plan horizontal. La lumière partie d'un point lumineux A se réfléchit en B et en C, et l'on voit l'image de A, après ces deux réflexions, en regardant dans la lunette D. Il est clair que les vibrations de B dilatent l'image verticalement, celles de C horizontalement, et qu'en se superposant elles déterminent l'une des courbes que nous avons étudiées. On peut aussi recevoir l'image du point A

(¹) LISSAJOUS, *Comptes rendus*, t. XLI, p. 814, t. XLIV, p. 727, et *Annales de Chimie et de Physique*, 3^e série, t. LI, p. 147; 1857.

dans une lentille et la projeter dans l'obscurité sur un tableau blanc où l'on voit se dessiner les figures.

Lorsque les deux diapasons sont rigoureusement accordés, ils donnent l'une des variétés de courbes qui correspondent à leur accord. Une fois commencée, la courbe persiste indéfiniment, tout en diminuant d'amplitude. Sa forme dépend de δ , et c'est le hasard du coup d'archet qui, à l'origine, en détermine la valeur.

Quand on ajoute à l'une des branches de l'un des diapasons une masse très petite, par exemple quand on y colle une boussette de cire, on change sa note d'une manière insensible, mais qui suffit à la longue pour troubler la relation des deux mouvements, c'est-à-dire la phase. Si cette phase croît, on passe lentement, par des altérations continues, de la première à la dernière figure de chaque série; si elle décroît, la transformation se fait de la dernière à la première.

Supposons en effet que les durées T et T' des deux vibrations soient en rapport simple, et que $\frac{1}{T'}$ s'altère d'une très petite quantité et devienne $\frac{1}{T'} + \alpha$; on aura

$$x = a' \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + t\alpha \right).$$

C'est comme si la phase de la vibration x était augmentée d'une quantité progressivement croissante $t\alpha$ et, comme ce changement sera très lent, la figure acoustique passera par toutes les transformations jusqu'à revenir à sa forme originelle

pour $t\alpha = 1$, ou après un temps $\frac{1}{\alpha}$: soit 20 secondes. Alors α

sera $\frac{1}{20}$, et cela voudra dire que le nombre des vibrations $\frac{1}{T'}$

aura été altéré de $\frac{1}{20}$ de vibration. On conçoit que l'invariabilité

de la figure acoustique est la meilleure manière de prouver que l'accord est exact, comme c'est le meilleur moyen d'accorder les deux diapasons.

M. Helmholtz ⁽¹⁾ a substitué aux diapasons ordinaires, employés dans ces expériences, des diapasons entretenus électriquement. On emploie pour cet objet deux bobines munies de noyaux en fer doux qui avoisinent les extrémités des branches du diapason et qui sont animées par des courants de même période que le diapason ⁽²⁾. On obtient ce résultat en chargeant le diapason lui-même d'interrompre ou de rétablir le courant excitateur.

M. Mercadier ⁽³⁾ répète l'expérience de Lissajous avec des diapasons entretenus électriquement; mais il charge les branches de l'un des diapasons de masses additionnelles considérables, que l'on peut faire glisser simultanément le long de ces branches, de manière à changer la hauteur du son. Il suffit alors d'un couple de diapasons pour produire à volonté toutes les figures optiques. En maintenant invariable l'intensité de la vibration, on peut conserver pendant un temps en quelque sorte indéfini la différence de phase initiale des deux diapasons, et par conséquent obtenir sur le tableau une courbe optique rigoureusement fixe, ce qu'il est presque impossible de réaliser dans les conditions ordinaires.

Au lieu de projeter sur un écran les courbes optiques, on peut les observer directement à l'aide du comparateur optique de Lissajous, dont le *microscope vibrant* de M. Helmholtz ⁽⁴⁾ n'est qu'une forme particulière. Ce microscope est porté par l'une des branches d'un diapason horizontal,

(¹) HELMHOLTZ, *Théorie physiologique de la Musique*, p. 114.

(²) Quand la vibration d'un corps est entretenue par une force périodique, on dit que la vibration est *forcée*. On démontre que, si la période de la force est égale à celle de la vibration libre et qu'il n'y ait pas de frottement, l'amplitude de celle-ci doit croître indéfiniment. Dans la pratique, on obtiendra seulement un son très fort, soit à cause des frottements, soit parce que la hauteur d'un son n'est pas indépendante de l'amplitude dès que celle-ci cesse d'être infiniment petite.

Quand la période de la force diffère de celle de la vibration libre, la période de la vibration forcée est encore celle de la force; mais l'amplitude est d'autant moindre que ces périodes diffèrent davantage.

(³) MERCADIER, *Journal de Physique*, 1^{re} série, t. II, p. 350, et t. V, p. 309; 1873-76.

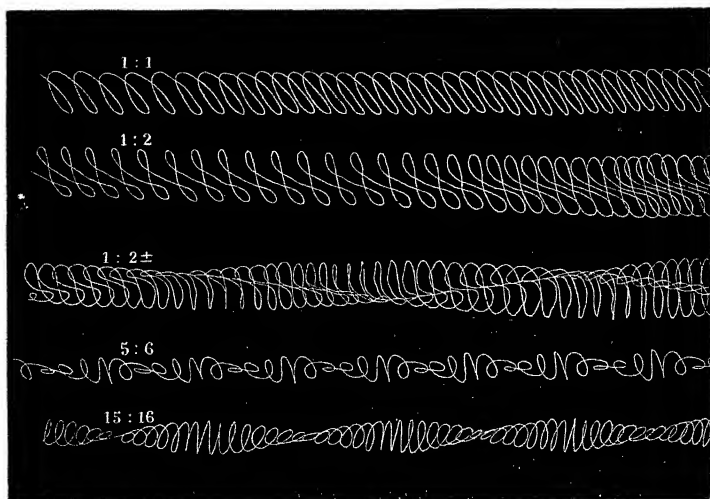
(⁴) HELMHOLTZ, *Théorie physiologique de la Musique*, p. 113 de l'édition française.

entretenu électriquement. L'autre branche du diapason porte un contrepoids, pour équilibrer le microscope.

Supposons que l'on observe à travers l'appareil un point lumineux immobile. Dès que le diapason entre en vibration, l'axe optique du microscope se déplace, et, grâce à la persistance des impressions, le point lumineux s'étale en une ligne brillante verticale. Si le point lumineux appartient à un corps dont les vibrations s'exécutent dans un plan horizontal, le mouvement vrai se compose avec le mouvement apparent qui résulte des vibrations du microscope, et l'on observe une courbe brillante dont la forme est caractéristique de l'intervalle des deux vibrations rectangulaires. La période de vibration du microscope étant connue, on en déduit celle du point lumineux observé.

Lissajous et Desains ont tracé d'une autre manière les vi-

Fig. 103.



brations rectangulaires superposées. Ils placent sur la section qui termine une des branches d'un gros diapason une lame de verre noircie; elle décrit avec le diapason lui-même des vibrations dans une direction que nous prendrons pour

axes des x . On approche maintenant de cette lame un style porté par un autre diapason qui oscille parallèlement à l'axe des y , et on le transporte d'un mouvement uniforme suivant l'axe des x ; on obtient alors les courbes singulières et remarquables de la *fig.* 103.

STROBOSCOPE. — Si l'on interpose entre l'œil et un corps vibrant un disque percé d'ouvertures équidistantes et qui tourne avec une certaine vitesse, les vibrations ne sont visibles que par intervalles, et d'une apparition à la suivante la phase a généralement changé. La persistance des impressions reçues par la rétine fait alors que les phases successivement visibles se composent pour former des vibrations apparentes que l'on peut ralentir à volonté en réglant convenablement la vitesse du disque. On a ainsi un moyen commode d'étudier la forme des vibrations des différents corps. La première idée de cette expérience est due à Plateau ⁽¹⁾; M. Tœpler ⁽²⁾ a étudié de cette manière les flammes vibrantes, le caléidophone, etc.

Supposons que le corps fasse n vibrations et qu'il soit visible n fois par seconde. Si n est un multiple exact de m , $n = mx$, il y aura toujours un nombre entier x de vibrations entre deux apparitions successives; le corps nous paraîtra toujours dans la même phase, c'est-à-dire immobile. Mais, si $n = mx \pm y$, en désignant par y le reste, positif ou négatif, de la division, la phase changera de $\pm y$ après une seconde et de $\frac{y}{m}$ après chaque apparition. Si donc y est un nombre relativement petit, les phases $\frac{y}{m}$, $2\frac{y}{m}$, ... se composent pour figurer y vibrations apparentes par seconde, et, si l'on a mesuré y et qu'on connaisse m , on en conclura le nombre n de vibrations.

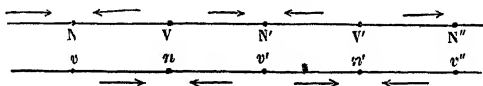
VIBRATIONS COMPLEXES DES VERGES. — Quand une verge est frottée dans le sens de sa longueur, nous avons admis qu'elle

⁽¹⁾ PLATEAU, *Annales de Poggendorff*, t. XXXII, p. 647; 1834.

⁽²⁾ TÖPLER, *Annales de Poggendorff*, t. CXXVII, p. 156; t. CXXVII, p. 108, 126; t. CXXXI, p. 33; 1866-67.

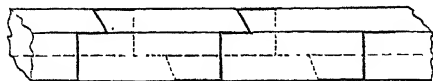
exécute exclusivement des vibrations longitudinales ; mais Savart ⁽¹⁾ a montré que celles-ci sont généralement accompagnées de vibrations transversales qui se superposent à elles. Supposons une verge prismatique fixée en son milieu et rendant longitudinalement le son fondamental ; il ne devrait point y avoir de nœuds entre le milieu et l'extrémité : cependant, en projetant du sable sur la surface, on le voit se rassembler en un nombre souvent considérable de lignes nodales qui ont un caractère particulier. Le sable s'y accumule en glissant rapidement vers chacune d'elles et en s'éloignant des milieux de chaque internœud, comme l'indique le sens des flèches (*fig.* 104). En outre, et c'est là ce qui est le plus singulier,

Fig. 104.



les nœuds ne se correspondent point sur les deux faces et sont généralement croisés. Les mêmes phénomènes se produisent avec une corde chargée de chevaux ou d'anneaux de papier, lesquels viennent rapidement se rassembler sur les nœuds. Si pour une verge prismatique on cherche la position occupée par les lignes nodales, on les trouve distribuées comme l'indique la *fig.* 105, et, sur un cylindre, elles figurent des lignes

Fig. 105.



hélicoïdales très complexes. Nous examinerons en particulier le cas où les verges sont très plates, et nous ne considérerons que ce qui se passe sur faces larges opposées.

Supposons, avec Savart, que les internœuds soient produits

(1) SAVART, *Annales de Chimie et de Physique*, 2^e série, t. XIV, p. 113; t. XV, p. 337; t. XXV, p. 12, 138, 225; 1820-24.

J. et B., *Acoustique*. — III (4^e édit., 1886), 1^{er} fasc.

par la superposition de vibrations transversales et longitudinales de même période; voici théoriquement les lois que le phénomène doit présenter : 1° il ne doit pas changer avec la largeur des lames, puisque les deux modes de vibrations sont indépendants de cette largeur; 2° e étant l'épaisseur, l la longueur d'un internœud et L celle de la verge totale, le son longitudinal est représenté par $\frac{V}{L}$ et il doit être égal au son transversal, qui est $\frac{Ae}{l^2}$; il faut donc que

$$\frac{V}{L} = \frac{Ae}{l^2} \quad \text{ou} \quad l = \sqrt{\frac{A}{V} e L},$$

c'est-à-dire que les internœuds soient en raison composée de l'épaisseur et de la longueur de la verge. L'expérience vérifie cette prévision.

Savart a encore soumis son hypothèse à d'autres épreuves. Après avoir reconnu la position des nœuds sur une lame vibrante, il fixa l'un d'eux sur la surface supérieure, le suivant sur la surface opposée et, faisant vibrer la lame transversalement avec un archet, il reproduisit à fort peu près le son qu'elle donne quand elle est ébranlée longitudinalement.

Pour expliquer ensuite la formation des nœuds, leur alternance sur les deux faces et la nature particulière du mouvement imprimé au sable, Savart fit appel à des considérations vagues que nous ne reproduirons pas et auxquelles nous substituerons une explication donnée d'abord par Seebeck ⁽¹⁾, qui découle des lois de la composition des mouvements rectangulaires. En effet, chaque molécule effectuant deux vibrations de même période, l'une longitudinale, l'autre transversale, elle décrira une des ellipses représentées (fig. 92). Or il est clair que la face supérieure de la lame aura un mouvement tangentiel *toujours* dirigé de droite à gauche du n° 1 au n° 5, *toujours* dirigé de gauche à droite du n° 5 au n° 9, et que, par conséquent, le sable s'éloignera du n° 5 pour se réunir au n° 1

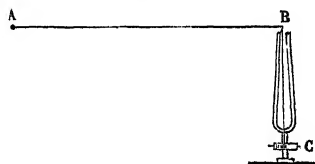
(1) SEEBECK. Voir DOVE, *Repertorium*, t. VIII, p. 53.

et au n° 9, qui seront des nœuds. Il est évident aussi que l'inverse aura lieu sur la face inférieure, où le mouvement tangentiel se fera toujours de gauche à droite du n° 1 au n° 5 et toujours de droite à gauche du n° 9 au n° 5. Conséquemment, le nœud sera au n° 5 et opposé à un ventre de la face supérieure.

Enfin, si l'on étudie les verges prismatiques, les molécules vibreront à la fois dans trois sens rectangulaires et décriront des trajectoires qui ne seront plus planes; mais il en résultera, comme précédemment, un mouvement tangentiel imprimé aux surfaces, et ce mouvement transportera le sable sur des lignes nodales compliquées que nous avons représentées *fig. 105*. En général, il est permis de conclure de tous ces faits que les molécules des corps solides n'effectuent presque jamais de vibrations linéaires simples, mais des oscillations extrêmement complexes.

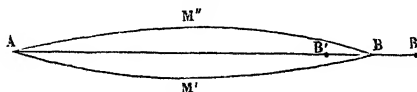
EXPÉRIENCE DE M. MELDE. — Au lieu de faire vibrer une verge rigide, on peut avoir recours à une corde tendue. L'une des dispositions que l'on peut employer a été indiquée par M. Melde (¹). Une corde horizontale (*fig. 106*) est fixée par l'une de ses extrémités A à un support rigide; l'autre B passe sur un chevalet fixé à l'extrémité de l'une des branches d'un diapason vertical et vient enfin s'enrouler sur un treuil C.

Fig. 106.



Si la longueur de la corde est telle que la période de ses vibrations longitudinales soit égale à celle des vibrations trans-

Fig. 107.



versales du diapason, il suffira d'exciter celui-ci au moyen de l'archet; la branche B oscillant de B' en B'' (*fig. 107*), la corde vibrera longitudinalement.

(¹) MELDE, *Ann. de Pogg.*, t. CIX, p. 193, et t. CXI, p. 513; 1859-60.

Nous sommes encore libres de changer à volonté la tension de la corde, puisque celle-ci n'influe pas sur la période des vibrations longitudinales, et nous pouvons la choisir telle que la période des vibrations transversales de la corde devienne égale à la moitié de celle du diapason ; alors la corde se mettra à vibrer aussi transversalement. En effet, quand la branche B du diapason va de B en B', la tension de la corde diminue, et, en vertu de son poids, elle s'infléchit vers le bas. Cette inflexion se propage de B vers A avec une vitesse égale à la vitesse de propagation des vibrations transversales, se réfléchit en A avec changement de signe et revient en B. Supposons qu'à ce moment le diapason ait exécuté une vibration complète. L'extrémité B de la corde se comportera comme un nœud, et celle-ci oscillera de AM'B en AM''B dans un temps double de celui qui correspond à une vibration du diapason.

Si maintenant on rend la tension 4, 9, 16 fois plus faible, la vitesse de propagation des ondes transversales devient 2, 3, 4 fois moindre et la corde vibre encore transversalement en rendant un son invariable, celui du diapason, mais en présentant 1, 2, 3 nœuds intermédiaires entre B et B'. On peut avoir recours à cette disposition pour montrer à un auditoire nombreux l'existence des ventres et des nœuds de vibration transversale.

La formule qui correspond au mode de vibration que nous venons d'étudier est

$$\frac{V}{L} = 2 \frac{V'}{l} = \frac{K}{l} \sqrt{P},$$

d'où

$$l = \frac{K}{V} L \sqrt{P}.$$

Cette formule exprime précisément que la longueur des internœuds est proportionnelle à la racine carrée du poids tenseur, comme l'expérience permet de le reconnaître.

RÉSONANCE. — On sait depuis un temps immémorial que tout corps sonore se met en vibration quand on produit dans son voisinage le son qu'il peut rendre. Lorsque, par exemple,

deux violons accordés sont placés aux deux extrémités d'une salle et qu'on met en vibration une corde du premier, on entend aussitôt la même corde du second rendre le même son. On fait à ce sujet de nombreuses expériences.

I. On place en face l'un de l'autre deux diapasons égaux fixés sur une caisse renforçante. On ébranle l'un d'eux, puis on éteint ses mouvements, et l'on remarque que le second continue le son qu'avait rendu le premier.

II. Fixons deux cordes à l'unisson sur un sonomètre, divisons la première, par un chevalet, en deux parties dont l'une soit le quart de la longueur totale, et attaquons-la par un archet. On sait que l'autre partie vibre synchroniquement et se divise en trois internœuds égaux. Aussitôt que le mouvement de cette première corde est commencé, la seconde se met à vibrer par résonance et se divise comme la première en quatre parties égales séparées par trois nœuds. Des chevalets de papier placés à ces nœuds demeurent immobiles ; ils sont rejetés, au contraire, quand on les place au milieu des ventres.

III. Nous avons déjà cité (p. 45) un exemple des phénomènes de résonance. Un diapason placé au-dessus d'une grande éprouvette ne détermine pas généralement les vibrations de l'air qu'elle contient ; mais, quand on verse de l'eau de manière à diminuer progressivement la longueur du tuyau, il arrive un moment où il peut rendre le son du diapason ; aussitôt ce son est produit et s'ajoute à celui qui lui a donné naissance. C'est sur cette propriété que sont fondées les expériences du renforcement des sons. On reconnaît que l'éprouvette est à l'unisson du diapason en dirigeant contre ses bords un courant d'air qui se partage en deux parties, comme sur le biseau d'une flûte ; la colonne d'air entre en vibration et rend le même son que le diapason.

On explique aisément ce genre d'action. Supposons que l'on tire pendant un temps très court la corde d'une cloche ; on lui imprime aussitôt des oscillations qui se continuent pendant longtemps. Si l'on répète l'impulsion plusieurs fois successivement, il peut arriver deux cas extrêmes : ou que chacune d'elles soit discordante avec le mouvement imprimé par la pré-

cédente, alors elle le détruit, ou bien qu'elle soit concordante, et alors elle l'augmente. Dans ce cas, l'amplitude des oscillations de la cloche grandit peu à peu jusqu'à devenir considérable.

Il en est de même des vibrations de deux cordes voisines, l'une en mouvement, l'autre en repos. Les vitesses de la première se transmettent à l'air et rencontrent la seconde, sur laquelle elles produisent des impulsions successives. Si les deux cordes sont d'accord, chaque impulsion continue l'effet de la précédente, et la vibration se transmet et s'exagère.

Supposons que pendant un temps t l'une des cordes fasse m demi-vibrations et l'autre $m + 1$. Les vitesses de la première se communiquent d'abord à la seconde, qu'elles mettront en mouvement; au bout de $\frac{t}{2}$ les deux vitesses seront contraires;

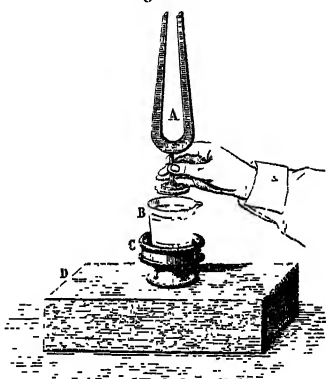
après t celles de la seconde seront détruites; elles recommenceront ensuite pour s'éteindre de nouveau après chaque période égale à t . Ces alternatives produiront un phénomène de battement. On les réalise en tendant sur un sonomètre deux cordes parallèles dont on projette l'image sur un tableau blanc. On ébranle la première et son image s'élargit; bientôt celle de la seconde s'élargit de même, puis redevient linéaire pour recommencer ensuite. A la fin, les deux cordes ont sensiblement la même amplitude vibratoire et échangent alternativement leurs vitesses: quand l'une est en repos, l'autre a son maximum de mouvement; à son tour celle-ci s'arrête pendant que la première se remet à vibrer.

On comprend par là que deux instruments qui ne sont pas tout à fait d'accord agissent cependant l'un sur l'autre par communication, et les expériences aussi bien que la théorie ont prouvé que celui qui vibre le plus lentement accélère ses mouvements pendant que les vibrations de l'autre se retardent, chacune réagissant sur sa voisine, dont elle altère la durée vibratoire pour la faire concorder avec la sienne.

La théorie mathématique de l'élasticité montre que tout mouvement de durée vibratoire égal à T tend à imprimer à un système de points matériels des vibrations synchrones, mais dont l'intensité est variable suivant les propriétés de ces sys-

tèmes (¹). Elle peut être faible, mais elle devient maxima quand le système est susceptible de donner par lui-même des vibrations de même durée. Ce résultat explique évidemment les effets précédents ; il explique aussi la propriété que possèdent toutes les substances de transmettre toutes sortes de vibrations ; voici un exemple curieux de cette propriété (*fig. 108*). D est une caisse en bois qui peut rendre le même son que le diapason A et le renforcer quand on appuie sur un point quelconque de sa surface la queue de ce diapason. On place au-dessus : 1° un godet en bois C ; 2° du mercure dans le godet ; 3° un verre B sur le mercure ; 4° de l'eau dans le verre. Si l'on vient ensuite à toucher la surface de l'eau avec le diapason, le renforcement du son se produit aussi bien que si l'on touchait la boîte elle-même. Il faut donc que les vibrations se produisent à travers tous les corps interposés, eau, verre, mercure et bois.

Fig. 108.



Quand une série de corps transmettent des vibrations, il se produit évidemment à chaque solution de continuité des phénomènes très complexes, qu'il est impossible d'étudier théoriquement. On ne peut énoncer sur ce point qu'une seule loi, qui paraît générale : c'est que les vibrations communiquées ont la même direction que celles qui les déterminent. C'est ce que Savart (²) a démontré par beaucoup d'expériences, et en particulier par la suivante (*fig. 109*). Une planchette en bois mince et fixée par un bout se continue à l'autre par une corde tendue. Si l'on ébranle celle-ci par un archet perpendiculaire-

(¹) Au sujet de la théorie mathématique de la résonance, voir en particulier HELMHOLTZ, *Théorie physiologique de la Musique*, suppl. III, p. 493 de la traduction française.

(²) SAVART, *Ann. de Chim. et de Phys.*, 2^e série, t. XXIX, p. 404 ; 1826.

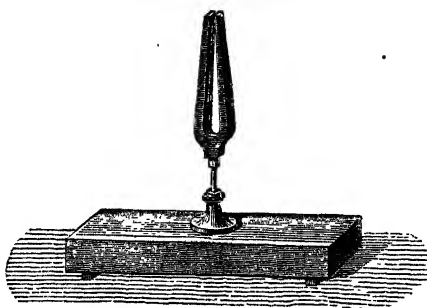
ment à la lame, elle la fait vibrer transversalement ; lorsque l'archet est parallèle à la surface, le sable glisse sur la planchette et indique par ses mouvements que les oscillations sont devenues tangentielles.

Fig. 109.



La quantité de mouvement communiquée à un milieu, à l'air par exemple, et transmise à l'oreille dépend évidemment de l'étendue plus ou moins grande des surfaces qui ébranlent directement ce milieu. Une corde mince encastrée dans des étaux de plomb ne donne presque point de son ; mais elle en produit qui sont très intenses si on la fixe contre une table par l'intermédiaire de chevalets élastiques. De même, un diapason ébranlé ne se fait point entendre quand il est tenu entre les doigts ; mais il acquiert une grande sonorité aussitôt qu'on le fixe sur un tuyau sonore (*fig. 110*), sur la caisse d'un violon

Fig. 110.



ou en général sur un corps élastique de surface large. Cela s'explique naturellement par les lois de la Mécanique. Tant que ces corps vibrants sont isolés dans l'air, ils n'en ébranlent qu'un petit nombre de points, tandis que, étant en contact avec de grandes surfaces élastiques, ils les font vibrer par communication, et ces surfaces, devenant à leur tour des corps

sonores plus étendus, ébranlent une masse d'air plus considérable et y déterminent un son plus intense.

Mais ce que l'on gagne en force, on le perd en durée du son. Un diapason ou une corde conservent pendant longtemps leur état vibratoire lorsqu'ils sont isolés dans l'air, et ils reviennent rapidement au repos quand ils sont en contact avec la table d'un violon ou d'une basse. Sous ce rapport, il ne faut point confondre ce mode de renforcement avec celui qu'on doit au porte-voix. Cet instrument ne fait que condenser dans une direction donnée l'onde sonore, qui, sans son action, s'étalerait dans l'espace; il dirige ce mouvement sans augmenter la perte de force vive et sans diminuer la durée du son.

On comprend maintenant que tous les instruments à cordes seraient presque muets s'ils n'étaient munis d'une *table d'harmonie* ou d'une *caisse* par laquelle ils puissent recevoir et transmettre à l'air ambiant la force vive développée dans les cordes. C'est dans la caisse d'un violon que résident toutes ses qualités. Elles dépendent de sa forme, de l'élasticité des bois, de l'épaisseur des tables, de la manière dont elles sont réunies par un pilier qu'on nomme l'*âme*, de la facilité avec laquelle la masse d'air intérieure renforce tous les sons de l'instrument, et en général d'une foule de conditions que la pratique est parvenue à réaliser, sans que la théorie puisse les formuler ni les prescrire sûrement.



CHAPITRE VI.

LE TIMBRE. — LA VOIX. — L'OUIE.

Le timbre. — Sons musicaux complexes. — Synthèse du timbre. — Sirène à ondes. — Loi de Ohm. — Analyse des sons composés. — Résonateurs. — Timbres divers.
 La voix. — Machine parlante. — Phonographe.
 L'ouïe. — Consonances et dissonances.

Il nous reste à étudier trois points très importants : 1^o le timbre des sons; 2^o la voix des animaux; 3^o les fonctions de l'oreille. Il y a vingt ans, le timbre était considéré comme une qualité spéciale des sons, résultant de causes inconnues : on ne s'occupait de la voix que pour faire des systèmes sur son mode de production; quant à l'oreille, on se contentait de décrire le bizarre assemblage de ses organes multipliés. Depuis cette époque, cette partie de la Physique a été transformée. C'est l'œuvre de plusieurs, mais surtout de M. Helmholtz (1). Nous allons donner une analyse succincte des beaux travaux de ce savant.

LE TIMBRE.

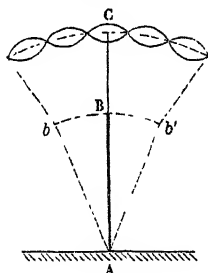
SONS MUSICAUX COMPLEXES. — Nous savons que toute vibration peut être décomposée en une série de vibrations harmoniques ou pendulaires ayant pour périodes $T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \dots$; mais nous ignorons encore à quels caractères l'oreille distingue une vibration harmonique isolée d'un son musical complexe. Un premier moyen de faire cette étude consiste à inscrire au moyen

(1) HELMHOLTZ, *Die Lehre der Tonemfindungen*; Braunschweig, 1863. M. Guéroult a publié, sous le titre de *Théorie physiologique de la Musique*, une traduction française de cet Ouvrage; Paris, 1868.

du phonautographe les courbes caractéristiques d'un son déterminé. On reconnaît ainsi que les diapasons placés sur une caisse renforçante, les tuyaux fermés, la voix humaine prononçant *ou*, donnent des vibrations harmoniques, c'est-à-dire peuvent être considérés comme rendant un son simple. Ces sons se font remarquer par beaucoup de douceur et de mollesse; mais ce sont là des cas tout à fait exceptionnels.

En général, les corps sonores exécutent en même temps plusieurs vibrations et rendent à la fois autant de notes différentes qui constituent un son *composé*. Pour nous en rendre compte sans avoir recours aux considérations analytiques qui ont guidé Fourier, imaginons, avec M. Melde ⁽¹⁾, une longue verge AB fixée en A (*fig. 111*). Elle décrit l'arc *bb'* quand on

Fig. 111.



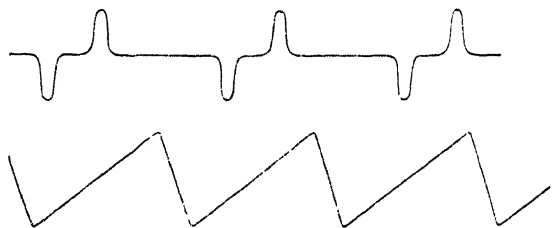
la met en vibration. Si on la prolonge par une autre verge BC, plus courte et plus flexible, qu'elle entraîne dans ses mouvements, il peut arriver que AB et BC exécutent à la fois des vibrations pendulaires, et, dans ce cas, le point C sera animé par la somme des mouvements que lui impriment séparément les deux tiges : ce sera une vibration tremblée, une oscillation composée. Or, ce qui est évident avec cet appareil, à cause de la lenteur de ses déplacements, se réalise également quand une verge unique rend, avec le son fondamental, une série d'harmoniques supérieurs. De même, une corde vibrante exécute à la fois des vibrations de totalité, puis des mouvements deux fois plus rapides autour de ses extrémités et de son milieu considérés comme fixes. Elle exécute en général toutes les oscillations qu'elle ferait séparément si elle était divisée en un nombre quelconque de parties égales; par conséquent, elle devra rendre l'ensemble superposé des sons que détermine chacun de ces modes de vibration. Il en sera de même des plaques, des membranes, des tuyaux et de tous les instruments à cordes. Dans ceux-ci les caisses de résonance, les tables

(1) MELDE, *Annales de Poggendorff*, t. CXV, p. 117.

d'harmonie renforceront certains sons supérieurs et compliqueront encore le mélange; enfin il est vraisemblable qu'il en sera de même de la voix des animaux. Nous pouvons donc admettre en général que les sons musicaux sont complexes et formés par la superposition de plusieurs notes simples, l'une, la plus basse et généralement la plus intense, qu'on nomme *fondamentale*, les autres appelées *supérieures* ou *harmoniques*, qui sont consonantes ou non avec la première, mais rentrent toujours dans la série de Fourier.

On peut obtenir à l'aide du phonautographe le tracé caractéristique d'une de ces vibrations complexes. C'est ainsi qu'en étudiant les vibrations de la guitare ou du violon on a obtenu les tracés caractéristiques qui suivent (fig. 112).

Fig. 112.



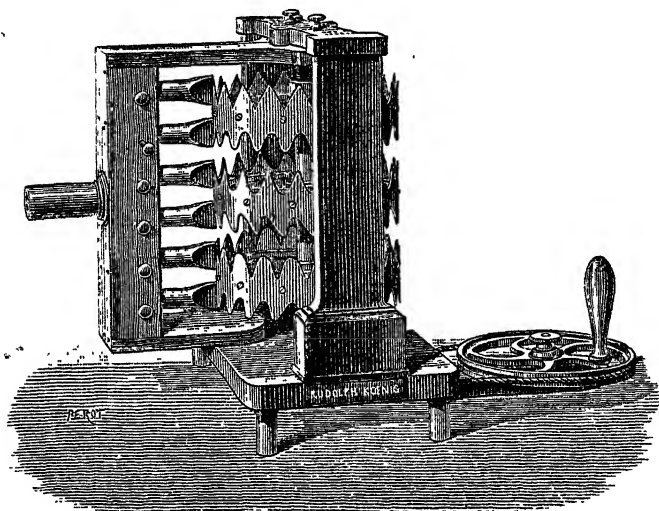
SYNTHÈSE DU TIMBRE. — SIRÈNE A ONDES. — La production de ces vibrations complexes s'accompagne d'un timbre spécial et caractéristique. Quand, au moyen de la sirène de Seebeck, on a combiné avec une note fondamentale intense un ou plusieurs sons supérieurs plus faibles, on ne les distingue point dans le son résultant, mais on éprouve une sensation nouvelle et qui change avec les sons qu'on a ajoutés. La note fondamentale a conservé sa hauteur; elle est altérée dans son timbre, qui devient plus éclatant et quelquefois plus rauque.

On peut produire le même effet avec des diapasons placés sur leurs caisses d'harmonie. Quand ils vibrent tous à la fois, l'oreille confond le résultat dans une sensation unique et perçoit un timbre spécial. Vient-on à éteindre les mouvements de tous les diapasons hormis ceux d'un seul, on constate qu'il vibre et que sa note entrait dans l'ensemble, bien qu'inaperçue.

On peut faire la même expérience en remplaçant les diapasons par des tuyaux d'orgue; c'est même en les choisissant convenablement qu'on obtient les différents timbres et qu'on imite celui de la voix humaine.

On doit à M. Kœnig un autre moyen, fort ingénieux, de reproduire et de varier des timbres. Après avoir construit graphiquement la courbe correspondant à la superposition de deux ou plusieurs harmoniques d'intensité et de phase choisies arbitrairement, on découpe un cylindre de tôle de manière que les dents de son profil coïncident avec la courbe obtenue (*fig. 113*). On dirige ensuite le vent d'une fente verticale, de

Fig. 113.



hauteur égale à celle des dents, sur le pourtour du cylindre animé d'un rapide mouvement de rotation, et l'on produit ainsi des vibrations dont la périodicité et le caractère sont déterminés par la forme des dents de la *sirène à ondes*.

Des expériences de cette espèce ont permis à M. Kœnig de constater, pour la première fois, que la phase des vibrations composantes ne modifie pas seulement l'intensité de la vibration résultante, comme on avait cru pouvoir l'admettre jusqu'alors.

Le caractère du son se trouve notablement modifié en même temps que son éclat. En ce qui concerne l'intensité, M. Kœnig ⁽¹⁾ a trouvé que les sons complexes composés d'harmoniques appartenant à la série des nombres pairs et à celle des nombres impairs ont une intensité minima pour la différence de phase $\frac{3}{4}$, et un maximum d'intensité et d'éclat pour la différence $\frac{1}{4}$.

LOI DE OHM. — Nous venons de voir que, en superposant des sons supérieurs à une note fondamentale, on obtient d'une part des variétés infinies de timbre et d'autre part des modifications caractéristiques correspondantes dans le tracé de la vibration résultante. Il faut maintenant démontrer expérimentalement la proposition réciproque : que tous les sons d'un timbre et d'une origine quelconques sont constitués par la superposition de notes simples.

En effet, de ce qu'on peut toujours envisager mathématiquement un son complexe comme formé de vibrations harmoniques superposées, il ne résulte pas nécessairement que ce mode particulier d'analyse du son soit réalisé par l'oreille. C'est ce qui a été établi pour la première fois par G.-S. Ohm à la suite d'une discussion remarquable qu'il eut à ce sujet avec Seebeck ⁽²⁾.

Quelquefois l'oreille exercée peut suffire à faire l'analyse du son. Elle distingue nettement les harmoniques des cloches; elle sépare aisément les sons de deux tuyaux parlant ensemble; si elle ne le fait point pour ceux qui composent la voix des animaux, c'est que notre attention n'est jamais appelée sur ce sujet. Ce qui importe le plus à nos besoins, en effet, ce n'est point de savoir quelles sont les notes qui caractérisent le hurlement d'un chien ou le son d'un violon, c'est de les reconnaître l'un et l'autre; aussi l'oreille s'est-elle exercée à distinguer les timbres, non à les analyser; mais elle devient capable de le faire en s'y appliquant. Ainsi, pendant qu'une

⁽¹⁾ R. KOENIG, *Quelques expériences d'Acoustique*, t. XVI, p. 222; Paris, 1882.

⁽²⁾ OHM, *Annales de Poggendorff*, t. LIX, p. 513; t. LXII, p. 1. — SEEBECK, *ibid.*, t. LX, p. 449; t. LXIII, p. 353 et 368; 1843-44.

personne donne la note re_2^* en prononçant *o*, on peut toucher sur un piano la note la_3^* . Elle s'éteindra peu à peu, et cependant on continuera de l'entendre tant que durera la voix. C'est qu'elle y est contenue et que, l'attention une fois appelée sur cette note, l'oreille sait la reconnaître. M. Helmholtz fait judicieusement remarquer qu'une multitude de sensations passent inaperçues jusqu'au jour où l'on s'est exercé à les démêler.

ANALYSE DES SONS COMPOSÉS. — RÉSONATEURS. — Mais M. Helmholtz ⁽¹⁾ a imaginé un moyen tout à fait physique et indépendant de l'oreille pour analyser les sons, moyen fondé sur les lois de la résonance que nous avons précédemment exposées. Prenons une sphère de cuivre (*fig. 114*) prolongée en A par un

Fig. 114.



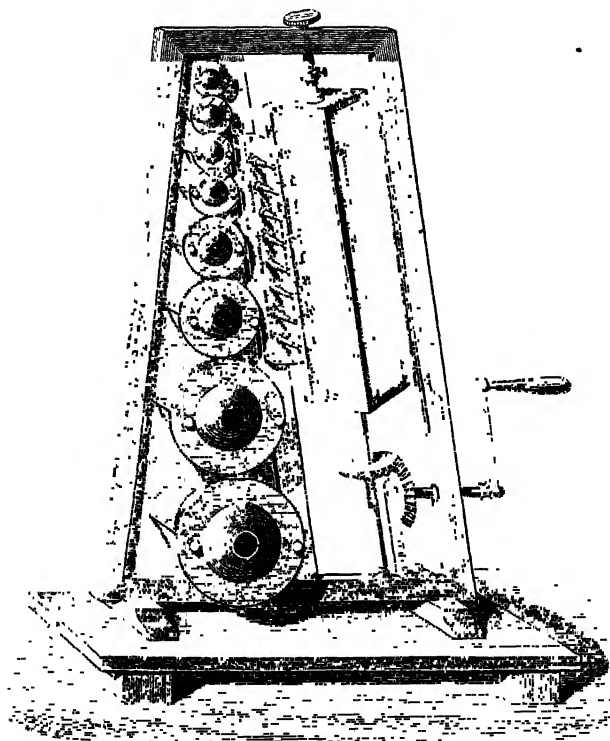
tuyau court, large et ouvert, et en B par un entonnoir pointu. Sa dimension est réglée de telle sorte que l'air intérieur rende un son déterminé, par exemple ut_2 . On s'assure que cette condition est remplie de deux manières : ou bien en soufflant avec les lèvres sur les bords du tuyau A, ce qui le met en vibration, ou bien en approchant de cette ouverture un diapason vibrant ut_2 , qui fait également parler la sphère. Cela posé, admettons qu'on mette l'extrémité B dans l'oreille et qu'on produise à distance une série quelconque de notes : ou bien elle contiendra ut_2 , qui, dans ce cas, sera renforcé par la sphère et que l'oreille entendra ; ou bien ut_2 n'existera pas dans la série des notes, et alors il n'y aura aucun renforcement. Cet appareil se nomme *résonateur* ; il offre donc le moyen de reconnaître si la note qu'il rend fait ou non partie d'un son composé.

(1) HELMHOLTZ, *Théorie physiologique de la Musique*, p. 57 et suiv. de l'édition française.

M. Kœnig ⁽¹⁾ a perfectionné le résonateur. Au lieu de le placer dans l'oreille contre la membrane du tympan, il le fait communiquer par un tube de caoutchouc avec une capsule manométrique C'. Toutes les fois qu'il parlera, la flamme L sera agitée, et, si on la regarde par réflexion dans un miroir tournant, on verra non pas une traînée continue de lumière, mais une ligne brillante sinueuse.

Concevons maintenant un appareil (fig. 115) composé de

Fig. 115.



huit résonateurs donnant toutes les notes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, c'est-à-dire une note fondamentale et la série de ses harmo-

(¹) KÖENIG, *Annales de Poggendorff*, t. CXXII, p. 666 et suiv.; 1868.

niques, et faisons parler devant les ouvertures de ces résonateurs le son r donné par un instrument quelconque : il est évident qu'il fera résonner la première sphère. Si c'est un son simple, il ne fera résonner qu'elle; mais, s'il contient avec ce son fondamental l'un quelconque de ses harmoniques, on verra la traînée lumineuse qui correspond à cet harmonique se denteler dans le miroir. En résumé, l'appareil représente une sorte de boîte à réactifs capable de déceler les notes qui composent le son qu'on étudie.

Pour que cet appareil fût apte à analyser tous les sons, il faudrait qu'il fût composé de résonateurs très nombreux se succédant à intervalles musicaux très rapprochés, ce qui le compliquerait beaucoup. Mais, le principe de la résonance étant général, on peut remplacer les sphères creuses par des cordes. Celles d'un piano satisfont à toutes les conditions voulues. Lorsqu'on émet un son dans la caisse ouverte de cet instrument après avoir soulevé tous les étouffoirs, chacun des harmoniques dont est composé le son communique sa vibration à la corde qui lui correspond, et, quand on a cessé de le faire entendre, l'ensemble des cordes ébranlées continue ses vibrations, et le son paraît se continuer non seulement avec la hauteur, mais avec le timbre qui le caractérisait. Si les cordes du piano sont horizontales, il est facile, en les couvrant de cavaliers légers, de savoir celles qui vibrent et comment elles vibrent, et d'en conclure la série des notes simples qui entraient dans le son multiple soumis à l'analyse.

TIMBRES DIVERS. — Cette méthode a conduit à de nombreux résultats qu'il nous reste à faire connaître. Elle a montré tout d'abord que les plaques, verges, cloches, membranes rendent, avec le son fondamental, des notes supérieures dissonantes, ce qui exclut leur emploi en musique. Cependant ces notes s'éteignent assez vite. Ainsi, elles sont très perceptibles avec les diapasons au moment où on les frappe avec un morceau de métal; mais elles s'éteignent aussitôt, et il ne reste que la note fondamentale r et la quinte de sa double octave, qui est représentée par 6 et qui est très faible. En fixant le diapason sur une caisse fermée capable de donner les sons r , 3, 5, 7,

9, ..., on renforce la note 1 sans augmenter l'harmonique 6, et l'on obtient sensiblement ainsi une vibration pendulaire et une note simple d'un timbre sourd et mou.

La vibration des cordes détermine, avec le son fondamental 1, tous ses harmoniques naturels 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, Avec un fil de fer très fin, M. Helmholtz les a reconnus jusqu'au 18^e. Les cinq premiers forment entre eux des accords harmonieux; à partir de 7, ils sont dissonants. C'est leur superposition qui donne à la note son timbre. Ce timbre varie avec la disposition de la table ou de la caisse d'harmonie, qui renforce inégalement les sons supérieurs et à laquelle les instruments à cordes doivent leurs qualités ou leurs défauts. Ils diffèrent aussi suivant que la corde est pincée, frappée par un marteau ou frottée avec l'archet.

Si elle est pincée, le son fondamental est faible, les harmoniques sont nombreux et intenses; on hésite quelquefois sur l'octave à laquelle appartient le son; on dit qu'il est creux : c'est le cas de la guitare.

Dans le piano, le fondamental est plus fort, les notes supérieures se suivent régulièrement, et quand la table d'harmonie les renforce également, le timbre résultant est plein. Quand le bois de cette table a perdu son élasticité par un long usage, il donne aux sons aigus trop d'intensité, le timbre change et devient aigre. Comme les notes 7 et 9 sont inharmoniques, on place le marteau au septième ou au neuvième de la corde, afin de les détruire, conformément à une pratique très ancienne qui s'explique naturellement (¹).

Dans le violon, les choses se compliquent beaucoup. Il y a d'abord un bruit de frottement rauque très perceptible quand l'oreille est rapprochée de l'instrument. Il y a ensuite la résonance de la caisse qui, dans les meilleurs instruments, donne le son fondamental ut_3 , et ensuite des harmoniques nombreux, très irréguliers, à cause de la forme bizarre que l'usage a consacrée. Cette forme, cependant, n'est pas indispensable. Savart a construit des violons carrés qui ne paraissent pas in-

(¹) Voici, d'après le calcul de Helmholtz (*Théorie physiologique de la Musique*, p. 111 de l'édition française), l'intensité relative des divers harmoni-

férieurs aux autres. La face supérieure est une lame de sapin très mince, très sèche et très élastique : c'est la table d'harmonie. Pour qu'elle puisse supporter sans fléchir la pression du chevalet, on la soutient par un pilier qui réunit les deux tables et qui transmet les vibrations de la supérieure à l'inférieure. C'est l'âme du violon ; quand on l'enlève, on affaiblit considérablement le son. Ce qu'il y a de singulier, c'est que ce pilier est toujours placé sous le pied droit du chevalet. Probablement cette situation permet au pied gauche d'exercer des trépidations sur la table et de lui communiquer des mouvements plus amples. On voit que, dans cet instrument, tout vibre, la corde, le chevalet, les deux tables et l'air contenu dans la caisse ; de là résultent une superposition très multipliée de vibrations et par conséquent un timbre très riche. Il est caractérisé par une fondamentale très forte et des harmoniques dont l'intensité décroît proportionnellement aux carrés de leurs nombres de vibrations.

ques pour une corde attaquée au $\frac{1}{7}$ de sa longueur. Les temps sont exprimés en fraction de la durée d'une vibration du son fondamental.

N ^{os} D'ORDRE des sons partiels.	INTENSITÉS THÉORIQUES					
	en pinçant la corde.	avec un marteau dont la durée de contact est				avec un marteau très dur
		$\frac{3}{7}$.	$\frac{3}{10}$.	$\frac{3}{14}$.	$\frac{3}{100}$.	
1.	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
2.	81,2	99,7	189,4	249,0	285,7	324,7
3.	56,1	8,9	107,9	242,9	357,0	504,9
4.	31,6	2,3	17,3	118,9	259,8	504,9
5.	13,6	1,2	0,0	26,1	108,4	324,7
6.	2,8	0,01	0,5	1,3	18,8	100,0
7.	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

L'expérience a montré que la troisième colonne de ce Tableau ($\frac{3}{7}$) correspondrait à peu près à ce qui se passe effectivement dans le piano pour la région de l'*ut*, la quatrième à la région de *sol*, la cinquième aux cordes les plus graves du piano

LA VOIX.

Commençons par nous rendre compte des qualités de la voix. La hauteur des sons que nous pouvons émettre varie d'une manière continue, comme ceux d'une corde qu'on diminuerait progressivement. Elle s'étend du *mi*₁ au *fa*₃ pour la basse-taille, de l'*ut*₂ à l'*ut*₄ chez le ténor. Les voix de femme sont beaucoup plus aiguës; elles sont comprises, celle d'alto entre *fa*₂ et *fa*₄, et celle de soprano entre *ut*₃ et *ut*₅. En résumé, la voix humaine effectue au moins 80 et au plus 1000 vibrations par seconde.

Quelle que soit sa hauteur, la voix humaine est, comme tous les sons, composée d'une fondamentale et de ses harmoniques. Une voix de basse qui émet un son grave sur un ton clair peut être analysée par les résonateurs, et l'on y reconnaît facilement jusqu'au seizième harmonique naturel. Jusque-là nous ne trouvons dans les sons émis par la voix humaine rien de particulier.

Ce qui la distingue de tous les autres sons, ce qui doit nous occuper le plus, ce sont les modifications que nous lui imprimons à notre volonté et d'où résulte la parole. La parole consiste d'abord dans l'émission de sons qui ont des caractères différents, des timbres particuliers, et qu'on nomme *voyelles*. Les langues diverses n'en reconnaissent et n'en emploient qu'un petit nombre, *a, e, i, o, ou, u*; mais, en réalité, il en existe un nombre infini. L'*e* peut passer d'une manière continue par les variétés *e, eu, é, é, i*; l'*o* peut également engendrer par gradations insensibles les timbres *o, ó, ou, u*. Il faut encore ajouter à ces sons les terminaisons des mots *an, fn, non, un*, véritables timbres qu'on peut indéfiniment prolonger, et par conséquent véritables voyelles. Chaque langue, d'ailleurs, consacre une prononciation spéciale; on sait, à ce sujet, les différences qui séparent les langues anglaise et française.

Le second élément de la parole humaine consiste dans les consonnes, qui ne sont point des sons persistants, mais des modes de commencer ou de finir les voyelles par une sorte d'explosion, c'est-à-dire par un mouvement de l'air comprenant au plus un très petit nombre de vibrations de forme

différente de celles de la voyelle qu'elles modifient; on les produit par un coup de langue ou un mouvement de lèvres; on n'en possède pas de tracé (¹) graphique bien satisfaisant.

Cette explosion précède le son musical de la voyelle et cesse aussitôt qu'il a pris naissance dans *ba*, *be*, *bi*, ..., ou bien elle le termine par un mouvement final des lèvres, dans *ab*, *at*, *ar*. Outre ce rôle, quelques consonnes ont la propriété de représenter une sorte de sifflement ou de frottement, *s*, *z*, *j*, *r*, qui peuvent se continuer indéfiniment sans émission de son proprement dit, soit que la période correspondante soit trop rapide pour impressionner l'oreille, comme dans les sifflantes, ou assez lente pour qu'on puisse, comme dans les roulantes, en saisir les pulsations individuelles.

Ainsi la combinaison des voyelles et des consonnes fait les

(¹) Cette lacune a été comblée partiellement par M. Barlow (*Proceedings de la Société Royale de Londres*, 1874; *Journal de Physique*, 1^{re} série, t. VIII, p. 178; 1879) à l'aide d'un petit appareil qu'il désigne sous le nom de *logographe*. C'est une sorte d'embouchure de trompette dont l'extrémité élargie est fermée par une membrane de caoutchouc. Un bras léger d'aluminium fixé au cadre de l'ouverture vient appuyer sur le centre de la membrane et porte un pinceau qui effleure une feuille de papier mobile. Les diverses émissions de voix fournissent des diagrammes dans lesquels les consonnes se distinguent nettement des voyelles qu'elles commencent ou terminent; les diverses consonnes sont, jusqu'à un certain point, reconnaissables les unes des autres à des caractères spéciaux.

Les diagrammes ci-joints, représentant les syllabes Ré (*fig. 116*), Eb (*fig. 117*), Beb (*fig. 118*), donneront une idée des résultats obtenus. Les lignes

Fig. 116.

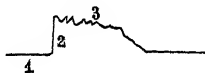


Fig. 117.

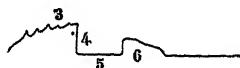


Fig. 118.



horizontales correspondent au repos, les parties tremblées aux sons sans voyelles, les sauts brusques et l'oscillation finale des *fig. 117* et *118*, à l'explosion de la consonne.

syllabes, et de la combinaison des syllabes naissent les mots des langues. Or il est clair que les mouvements des lèvres qui sont représentés par les consonnes n'ont pas besoin d'explication, et que la seule étude qui nous concerne est celle des origines, des caractères distinctifs et des causes de ces sons spéciaux qu'on nomme *voyelles*. Ces sons s'engendrent dans un organe spécial, la glotte, qui termine la trachée-artère et vient déboucher dans le pharynx. Il se compose, comme partie essentielle, d'une fente formée par deux lèvres membraneuses de couleur jaune, improprement appelées *cordes vocales*, qui peuvent se rapprocher ou s'éloigner et qui vibrent avec une rapidité plus ou moins grande quand l'air passe entre elles. Elles vibrent comme le font les lèvres dans les embouchures des instruments de cuivre; elles produisent le son de la même manière: un son grave si elles sont lâches, et qui devient de plus en plus aigu quand elles se tendent. Au-dessus d'elles se trouve une cavité élargie, le ventricule, terminée par une seconde paire de lèvres qu'on nomme *ligaments supérieurs*. Divers physiciens, parmi lesquels il faut citer Wheatstone ⁽¹⁾, ont réussi à disposer au-dessus d'un tuyau des lèvres élastiques en caoutchouc qu'on peut tendre ou écarter, et qui rendent des sons comparables à la voix. Il n'y a donc aucun doute sur ce point: la voix se produit, comme tous les sons, par les vibrations de deux membranes voisines; elle naît dans la glotte et se compose d'une fondamentale et de sons harmoniques nombreux.

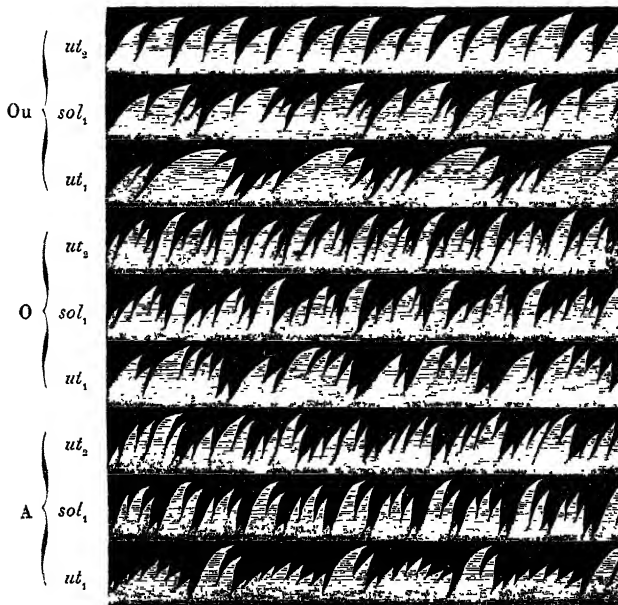
Mais, si la voix, considérée comme son, naît dans la glotte, c'est dans la bouche qu'elle devient voyelle. La cavité comprise entre la glotte, le voile du palais, la bouche et les lèvres est un espace plein d'air, un véritable résonateur qui renforce certains harmoniques de la voix et lui donne un timbre. Pour le changer, c'est-à-dire pour passer d'une voyelle à une autre, il n'est pas nécessaire de modifier les cordes vocales et de changer le son produit: il suffit de modifier la forme de la bouche, ce qui change les harmoniques. Pour passer de l'*a* à

(¹) WHEATSTONE, *Critique des expériences de Willis* (London and Westminster Review, octobre 1837).

l'*o*, par exemple, il suffira, sans que le gosier intervienne, de donner successivement à la bouche les formes que le professeur de Philosophie enseignait à M. Jourdain.

Pour justifier cette manière de voir, pour prouver que la voyelle n'est qu'un timbre, il suffit d'une seule expérience. Puisque les cordes d'un piano renforcent chacune des notes

Fig. 119.



élémentaires qui composent un son complexe et continuent de vibrer même après que ce son a cessé, il suffit de crier dans la caisse ouverte de cet instrument les voyelles *a*, *o*, *ou*, *eu*, *on*, etc. Or l'expérience prouve que le piano continue de prononcer les mêmes syllabes. Elles ne sont donc rien autre chose qu'un timbre, un ensemble de notes simples.

M. Koenig ⁽¹⁾ a réussi à rendre visibles les timbres des diffé-

(1) KOENIG, *Annales de Poggendorff*, t. CXLVI, p. 161 et suiv.; 1872.

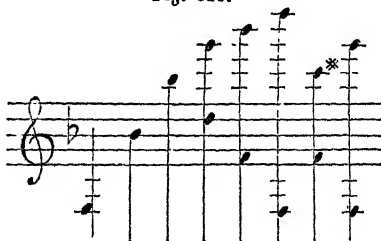
rentes voyelles en chantant une série de notes sur l'une ou l'autre de ces voyelles pendant qu'il embouchait une sorte de pavillon qui remplaçait le résonateur AB dans l'appareil de la *fig. 114*. Voici la forme des flammes qui caractérisent les voyelles A, O, Ou (*fig. 119*).

Il reste à dire quelles sont les conditions qui déterminent l'émission de telle ou telle voyelle. M. Helmholtz a fait sur ce point de très nombreuses analyses, dont le résultat a conduit à la loi suivante, qui est remarquable par sa simplicité : pour former une voyelle déterminée, il faut ajouter au son de la voix tel que le produit le gosier une ou plusieurs notes caractéristiques, toujours les mêmes, et que nous nommerons *vocables*. Elles ne changent qu'avec la voyelle prononcée, mais elles ne dépendent ni de la hauteur du son ni de la personne qui les émet ; les voyelles Ou, O, A n'en exigent qu'une, qui sont fa_2 , $(si^b)_3$, $(si^b)_1$. Les autres voyelles en renferment au moins deux. Voici leur Tableau général :

Syllabes	Ou	O	A	Ai	E	I	Eu	U
Vocables.....	fa_2	$(si^b)_3$	$(si^b)_1$	$ré_4$ sol_5	fa_3 $(si^b)_5$	fa_2 $ré_6$	fa_3 $(ut^*)_6$	fa_2 sol_5

On les résume musicalement comme il suit (*fig. 120*) :

Fig. 120.



Cette loi générale peut être vérifiée de plusieurs manières.

I. On prononce distinctement la syllabe A sur le ton de ut_2 devant la série des résonateurs (*fig. 115*), et l'on examine les traînées lumineuses des flammes manométriques dans le miroir tournant. Il y en a deux qui sont tremblées : c'est ut_2 , c'est-à-dire la note elle-même, et $(si^b)_4$, la vocable qui carac-

térise A. Si l'on change la voyelle sans altérer la hauteur, et qu'on prononce O, ut_2 ne change pas, la flamme (sz^b)₁ cesse d'être tremblée, mais (sz^b)₃, qui ne l'était pas, devient discontinue. On pourra ensuite changer la hauteur du son sans changer les vocables qui accompagnent A ou O, ou bien faire l'expérience avec des voix d'homme, de femme et d'enfant, et le résultat sera toujours le même.

II. Puisque ces vocables sont fixes, on peut construire des diapasons qui les émettent et des résonateurs correspondants qui les renforcent. Mettons en vibrations le diapason (sz^b)₂ et plaçons-le devant la bouche, à laquelle nous donnerons successivement les formes qui conviennent à l'A et à l'O. Dans le premier cas, elle ne résonnera pas; dans le second, elle renforcera (sz^b)₃ et l'on entendra O. Ce serait l'inverse si l'on faisait l'expérience avec le diapason (sz^b)₁.

III. Au lieu de faire vibrer les diapasons devant la bouche, on les place auprès de l'ouverture antérieure des résonateurs correspondants, et l'on trouve qu'il prononcent A ou O. On peut aussi, et plus simplement, faire parler ces résonateurs en dirigeant un courant d'air sur le bord de leur ouverture, comme sur le biseau d'une flûte; cette fois encore on obtient A ou O.

IV. M. Willis (¹) a remplacé les résonateurs par des tuyaux qui rendent les sons des divers vocables, auxquels il adapte des embouchures à anches. Quand on les fait parler, on réalise les conditions de la voix humaine : l'anche produit un son comme la glotte, et le tuyau, en y ajoutant la vocable, détermine telle ou telle voyelle. C'est avec ces sortes d'appareils que se fait la voix des poupées parlantes.

Après avoir fait l'analyse du timbre des voyelles, M. Helmholtz a essayé leur synthèse. Son appareil est composé d'une série de diapasons dont les branches sont placées entre des électro-aimants. Des interrupteurs convenables aimantent périodiquement le fer doux qui attire les branches des diapasons et les mettent en vibration continue. En avant sont disposés des résonateurs qu'on ouvre ou ferme plus ou moins et qui

(¹) WILLIS, *Annales de Poggendorff*, t. CXXIV, p. 397; 1865.

renforcent autant qu'on le veut les sons émis. On les combine deux à deux ou trois à trois, et l'on parvient, par l'addition des vocables convenables, à reproduire les diverses voyelles. Il faut néanmoins avouer que cette reproduction n'a point jusqu'à présent été absolument complète. Il ne faut rien en conclure contre la vérité des principes que nous venons de poser; cela prouve seulement qu'on ne connaît pas encore toutes les vocables caractéristiques de chaque voyelle.

MACHINE PARLANTE. — PHONOGRAPHE. — Après avoir réalisé l'analyse et la synthèse des voyelles, il restait à effectuer celle de la parole articulée. Deux solutions différentes ont été trouvées dans ces derniers temps.

La machine parlante de M. Faber ⁽¹⁾ se compose d'une anche d'ivoire dont les deux lames plus ou moins écartées produisent les vibrations sonores. Le vent envoyé par un soufflet traverse l'anche, pénètre ensuite dans une sorte de cavité buccale, dont la forme peut être modifiée au moyen de diaphragmes de forme variée, mus à l'aide de touches et de pédales. Dans cette bouche, terminée en avant par des lèvres mobiles, se déplace une langue en caoutchouc. Enfin une cavité nasale complète cet appareil curieux, calqué en quelque sorte sur l'organe vocal. Quatorze touches ou pédales, ingénieusement combinées, suffisent à la reproduction des voyelles et des consonnes : la parole articulée est à coup sûr défec-tueuse, mais les mots et les phrases entières sont aisément reconnaissables.

M. Edison ⁽²⁾ est parvenu à reproduire la parole par une disposition infiniment plus simple, très analogue à celle du phonautographe de Scott, mais qui en diffère par sa réversibilité.

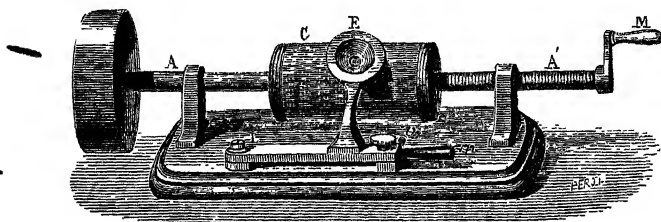
L'organe essentiel du *phonographe* (fig. 121) est une membrane métallique très mince P fermant un porte-voix E, devant

⁽¹⁾ *Journal de Physique*, t. VIII, p. 274 (1879).

⁽²⁾ Voir la Note de M. du Moncel (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVI, p. 643) et les articles de M. Niaudet et de M. Mayer [(*Journal de Physique*, t. VII, p. 109 et 13 (1878)].

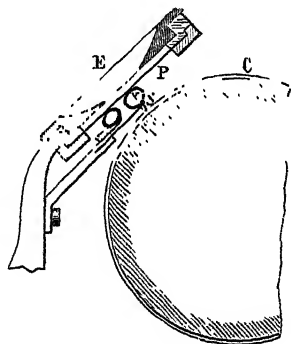
lequel sont émis les sons. Au-dessous de la membrane se trouve un style métallique rigide et fort court, fixé à l'extrémité d'un ressort, et qui ne communique avec la membrane

Fig. 121.



que par deux appuis X en caoutchouc (*fig. 122*), destinés à transmettre les vibrations de la membrane en étouffant les vibrations propres du ressort.

Fig. 122.



En regard du style se déplace une feuille d'étain C collée sur un cylindre de laiton. Celui-ci porte une rainure hélicoïde et se prolonge par une vis A' de même pas, tournant dans un collier fixe. Quand on fait tourner le cylindre, la feuille d'étain glisse devant le style, et celui-ci y trace des gaufrages persistants dont la forme est caractéristique des vibrations imprimées par la voix à la membrane. La *fig. 123* montre en A une représentation amplifiée d'un de ces gaufrages, dont on

voit le relief en B. La ligne C se rapporte aux flammes de Kœnig et montre avec le tracé B une analogie de forme incontestable.

Fig. 123.



Pour faire parler le phonographe, il suffit de soulever le style, de ramener le cylindre dans sa position initiale et de tourner de nouveau la manivelle M, de manière que les gaufrages précédemment obtenus viennent passer successivement devant la pointe du style. Le style S est soulevé, et avec lui la membrane P, de telle sorte que, la cause et l'effet se trouvant intervertis, la membrane exécute des vibrations identiques à celles que la voix lui avait d'abord imprimées; ces vibrations se transmettent à l'air, et le son produit ne diffère de celui qui avait été émis devant l'instrument que par sa moindre intensité et un timbre un peu plus aigre.

Bien entendu, nous supposons que les circonstances du mouvement de rotation du cylindre sont identiques dans les deux opérations de l'impression et de la reproduction de la parole, par exemple que le mouvement du cylindre est dans les deux cas parfaitement uniforme et de même vitesse. Si l'on accélère ou qu'on retarde la marche du cylindre, le nombre de vibrations appelées par seconde augmente ou diminue et le ton de la parole s'élève ou s'abaisse.

L'impression une fois reçue devrait théoriquement permettre la reproduction indéfinie de la parole. Dans le fait, le gaufrage de l'étain devient de plus en plus confus à chaque nouvelle reproduction du son et finit par ne rendre que des bruits indistincts; mais il sera sans doute possible d'écarter cet inconvénient avec des clichés plus résistants.

Le phonographe peut servir à enregistrer et à reproduire

toute espèce de sons ou de bruits et à étudier les effets résultant de leur superposition. Ainsi, plusieurs personnes peuvent parler successivement devant l'appareil, ramené chaque fois à son point de départ. L'impression multiple obtenue reproduira le mélange des voix, et, en prêtant son attention à l'une d'elles en particulier, l'observateur distinguera très nettement les paroles qu'il veut entendre au milieu du bruit général.

L'OUÏE.

LES CONSONANCES ET LES DISSONANCES. — L'oreille est un organe très compliqué, et l'on ignore les fonctions des parties qui la composent; nous ne les décrirons pas. Bornons-nous à dire que l'oreille se termine par une cavité qu'on nomme *limaçon*, à cause de sa ressemblance avec la coquille de cet animal. Le limaçon est divisé dans toute sa longueur en parties supérieure, moyenne et inférieure par deux membranes tendues à la moitié de sa hauteur. Dans le compartiment moyen, le marquis de Corti a découvert de petites plaques microscopiques innombrables, rangées régulièrement les unes à côté des autres comme les touches d'un piano communiquant par une de leurs extrémités avec des filets du nerf acoustique et par l'autre avec la membrane tendue. Il n'en a pas fallu davantage pour qu'on ait supposé que ces fibres sont accordées chacune avec une note donnée, qu'elles se mettent à vibrer avec cette note, et qu'ainsi elles décomposent un son mixte, comme le fait un piano, en ses éléments pendulaires. Cette théorie est tout hypothétique; elle n'est pas invraisemblable. Les observations de M. Hensen (1) sur les poils auditifs des décapodes la confirment d'une manière inattendue. En effet, ces poils vibrent sous l'influence des sons extérieurs, et chacun d'eux sous l'action d'une note spéciale.

Une note simple mettrait en vibration non seulement celle de fibres de Corti qui est rigoureusement d'accord avec elle, mais aussi celles qui l'avoisinent et qui répondent à des notes un peu plus hautes ou un peu plus basses. Il y a donc une *série*

(1) HENSEN, *Études sur l'organe de l'ouïe chez les décapodes* (*Journal de Zoologie de Siebold Kolleker*, XII).

de fibres qui répondent à chaque son simple. Supposons maintenant que deux sons de cette espèce soient superposés. S'ils sont très différents, les séries de fibres qu'ils ébranlent sont très éloignées; s'ils sont très rapprochés, elles ont une partie commune. Dans ce cas, l'oreille ne sépare pas les deux sons; les fibres, ébranlées à la fois par les deux notes, reçoivent périodiquement les sommes et les différences des deux vitesses vibratoires, et il y a des battements. C'est donc un phénomène subjectif. A mesure que les notes composantes s'éloigneront l'une de l'autre, leurs battements se précipiteront; mais les deux séries de fibres ébranlées seront moins près l'une de l'autre, leur partie commune diminuera; elles finiront par se séparer complètement et les battements cesseront. Il n'y aura plus que deux sons distincts, que l'oreille apprécie séparément et qu'elle sépare.

Mais il restera un phénomène physique. La courbe des vitesses transmises offrira des redoublements et des affaiblissements d'intensité; ils se reproduiront pendant une seconde un nombre de fois $M - N$ égal à la différence des nombres de vibrations des deux notes, et, si $M - N$ est suffisamment grand, cela constituera un véritable son, le son résultant, qui sera analysé par la série de fibres qui répond à cette périodicité. On voit que les sons résultants commencent quand les battements finissent, que ceux-là sont des actions physiques et ceux-ci des phénomènes physiologiques.

Or l'expérience prouve que les battements produisent un effet très désagréable quand leur nombre est de 30 ou 40 par seconde, et que cet effet diminue ou disparaît quand ce nombre dépasse 60 ou 100. Dans la théorie précédente, cette répulsion de l'oreille serait due aux tiraillements qu'éprouvent les fibres de Corti attaquées à la fois par deux sons voisins.

Que cette hypothèse soit ou non fondée, le fait est certain. Tous battements suffisamment rapides produisent une dissonance, un déplaisir. Cela étant, M. Helmholtz ⁽¹⁾ explique les consonances et les dissonances par les principes suivants :

(1) HELMHOLTZ, *Théorie physiologique de la Musique*, p. 380 et 435 de la traduction française.

1° les sons musicaux sont un assemblage d'une note fondamentale 1 et d'harmoniques 2, 3, 4, 5,...; 2° toute superposition de deux sons qui produira des battements soit entre leurs notes fondamentales, soit entre leurs harmoniques, sera dissonante; 3° toute superposition de sons fondamentaux et harmoniques qui ne donnera point de battements sera consonante; 4° le degré de dissonance sera marqué par le nombre de notes simples qui battront entre elles et sera proportionnel à leur intensité.

I. Considérons deux sons à l'octave représentés, le premier par les notes simples

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ...

le second par

2 4 6 8 10 ...

La deuxième série de notes est rigoureusement comprise dans la première; il n'y a aucun battement: il y a consonance parfaite, ce qui fait dire aux musiciens que l'octave n'est qu'une réplique de la note grave. Mais, si l'une des deux notes s'altérerait, même d'une très petite quantité, tous les harmoniques battraient: il y aurait un désaccord général. C'est pour cette raison que l'intervalle d'octave est celui qui souffre le moins d'altérations.

II. Deux sons à la quinte, 2 et 3, offrent les séries de notes pendulaires suivantes :

2 4 6 8 10 12 14 ... ,
3 6 9 12 ... ,

Le deuxième harmonique 9 de la note 3 bat avec 8 et 10 de la note 2. La quinte a donc une cause de dissonance que n'avait pas l'octave; cette dissonance est faible, parce qu'elle est produite entre les harmoniques élevés et peu intenses.

III. Les quartes sont

3 6 9 12 15 18 21 ... ,
4 8 12 16 20 ...

9 battra avec 8, 15 avec 16, 20 avec 21.

IV. Les tierces majeures donnent

4	8	12	16	20	24	...
5	10	15	20	25	...	

Il n'y aura de battements qu'entre 15 et 16 et entre 24 et 25.
La dissonance des tierces est moindre que celle des quartes.

V. Les intervalles de secondes $\frac{9}{8}$ seront

8	16	24	32	40	48	...
9	18	27	36	45		...

Les notes fondamentales aussi bien que les harmoniques donneront lieu à des battements, et la dissonance sera complète.

Il semblerait, d'après cette théorie, que les notes dépourvues d'harmoniques, celles de la flûte ou des bourdons, devraient toujours être consonantes quand elles sont éloignées. En réalité, les dissonances de ces notes sont beaucoup moins appréciables; cependant elles existent et se manifestent entre leurs sons résultants.

Nous ne suivrons pas M. Helmholtz dans l'analyse des conditions de l'harmonie des notes successives. Ce que nous disons de ces remarquables travaux suffit pour qu'on en puisse apprécier l'importance.

TABLE DES MATIÈRES

DU PREMIER FASCICULE DU TOME TROISIÈME.

ACOUSTIQUE.

INTRODUCTION.

	Pages.
<i>Origine et qualités du son</i>	1
Origine du son	1
Qualités du son	1

CHAPITRE PREMIER.

De l'évaluation numérique des sons.

<i>Mesure du nombre des vibrations</i>	6
Sirène	6
Sirène de Seebeck	8
Roue dentée	9
Méthode graphique	10
<i>Accords musicaux</i>	12
Accords simples	12
Accords multiples	14
Gamme harmonique	15
Dièses et bémols	18
Gamme mélodique	20
Tempérament	22
Logarithmes acoustiques	23
Diapason	26
Limite des sons perceptibles	26

CHAPITRE II.

Vibrations longitudinales.

	Pages.
Vibration harmonique d'un point matériel.....f.....	29
Propagation des vibrations longitudinales dans un cylindre indéfini; vitesse de propagation.....	31
Réflexion du mouvement vibratoire.....	36
Réflexion avec changement de signe.....	37
Vérifications expérimentales.....	41
Réflexion sans changement de signe.....	42
<i>Tuyaux sonores</i>	44
Cas des tuyaux fermés.....	45
Cas des tuyaux ouverts.....	47
Imperfections de la théorie précédente.....	53
Embouchure de flûte.....	55
Embouchure à anche.....	57
Tuyaux coniques.....	58
Instruments à vent.....	59
<i>Vibrations longitudinales des liquides et des solides</i>	60
Liquides.....	60
Solides.....	61

CHAPITRE III.

Vibrations transversales.

Corde illimitée.....	64
Corde limitée.....	66
Sonomètre.....	69
Lois des vibrations transversales des cordes.....	72
Rapport des vibrations longitudinales et transversales.....	74
Influence de la rigidité.....	75
Vibrations transversales des verges.....	76
Diapason.....	80
Vibrations engendrées par la torsion.....	81

CHAPITRE IV.

Du mode et de la vitesse de propagation des vibrations
dans un milieu indéfini.

Vibrations longitudinales et transversales dans un milieu indéfini.	83
Vibrations des surfaces liquides.....	85

TABLE DES MATIÈRES.

195

	Pages.
Réflexion du son	87
Échos.....	89
Porte-voix.....	89
Cornet acoustique.....	90
Réfraction du son.....	91
<i>Vitesse du son</i>	91
Formules de Newton et de Laplace	91
Formules générales relatives aux corps solides.....	95
<i>Mesure expérimentale de la vitesse du son</i>	96
Vitesse du son dans l'air. — Anciennes expériences.....	96
Expériences de Regnault.....	98
Effet de la variation de la pression	103
Expériences sur divers gaz	103
Détermination de $\frac{G}{c}$ et de l'équivalent mécanique de la chaleur... ..	104
Expériences de M. König.....	105
Mesure directe de la vitesse du son dans l'eau et dans la fonte... ..	106
Mesure indirecte de la vitesse du son.....	107
Cas des gaz.....	108
Cas des liquides.....	111
Cas des solides.....	114
Méthode de Kundt.....	115
Influence d'un mouvement de translation.....	116

CHAPITRE V.

De la composition des mouvements vibratoires.

Interférences.....	118
Vibrations parallèles. — Composition des vibrations de même période.....	118
Vibrations des plaques.....	126
<i>Interférence des vibrations de périodes inégales</i>	131
Battements.....	136
Sons de battements, sons résultants.....	139
Sons de variation.....	141
Théorème de Fourier.....	142
Phonautographe.....	145
<i>Composition des vibrations rectangulaires</i>	147
Discussion géométrique.....	151
Caléidophone.....	155
Méthode optique.....	156

	Pages
Stroboscope.....	160
Vibrations complexes des verges.....	160
Expérience de M. Melde.....	163
Résonance.....	164

CHAPITRE VI.

Le timbre. — La voix. — L'ouïe.

<i>Le timbre</i>	170
Sons musicaux complexes.....	170
Synthèse du timbre. — Sirène à ondes.....	172
Loi de Ohm.....	174
Analyse des sons composés. — Résonateurs	176
Timbres divers	177
<i>La voix</i>	180
Machino parlante. — Phonographe	186
<i>L'ouïe</i>	189
Les consonances et les dissonances.....	189

TABLE DES MATIÈRES,

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE,

DU PREMIER FASCICULE DU TOME TROISIÈME.

- Accords musicaux, 12. — Accords multiples, 14. — Accord parfait, 14.
 Acier, 115.
 Air (Vitesse du son dans l'), 96, 102, 103, 110, 111.
 Alcool, 114.
 Alto, 180.
 Ame du violon, 169, 178.
 Ammoniaque, 104.
 Amplitudes des vibrations, 30.
 Analyse d'un son, 174.
 Anches, 57.
 Argent, 115.
 Azote (Protoxyde d'), 104, 110.
 Basse-taille, 180.
 Battements, 136. — Sons de battements, 139.
 Bémols, 18.
 Bruits et sons, 104.
 Caléidophone, 155.
 Carbone (Oxyde de), 110.
 Carbonique (Acide), 104, 110.
 Chaleurs spécifiques (Rapport des), 104.
 Comma, 17, 25.
 Comparateur optique, 158.
 Composition des mouvements vibratoires, 118.
 Coniques (Tuyaux), 58.
 Consonances, 12, 189.
 Consonnes, 181.
 Cordes, 64. — Cordes vocales, 182.
 Cornet acoustique, 90.
 Cuivre, 115.
 Cylindre, 31.
 Demi-tons, 23, 25.
 Diapason, 26, 176.
 Dièses, 18.
 Dissonances, 12, 189.
 Eau (Vitesse du son dans l'), 106, 113, 114.
 Eau de mer, 114.
 Échos, 89.
 Embouchure, 44, 55, 57.
 Enharmonique (gamme), 25.
 Équivalent mécanique de la chaleur, 104.
 Éther, 114.
 Fer, 115.
 Fibres de Corti, 189.
 Flammes manométriques, 50.
 Flûte (Embouchure de), 55.
 Fonte, 106.
 Forcées (Vibrations), 158.
 Formules relatives à la vitesse du son, 91, 95.
 Gamme harmonique, 15; gamme mélodique, 20; gamme majeure et mineure, 22; gamme tempérée, 23; gamme enharmonique, 25.
 Gaz (Vitesse du son dans les), 108.

- Glotte, 182.
 Graphique (Méthode), 10.
 Guitare, 173, 177.
 Harmonie (Table d'), 169.
 Harmonique (Gamme), 15. — Vibration harmonique, 29, 31. — Harmoniques des tuyaux, 47, 49, 58.
 Hauteur du son, 5.
 Hydrogène, 104, 110.
 Images sonores, 88.
 Influence du mouvement du corps sonore, 116.
 Instruments à vent, 59.
 Intensité du son, 4. — Intensité d'une vibration, 30.
 Interférences, 118; vibrations parallèles et de même période, 118; vibrations parallèles et de période différente, 131; vibrations rectangulaires, 147.
 Intervalles musicaux, 17.
 La normale, 26.
 Ligaments supérieurs, 182.
 Limaçon, 189.
 Limite des sons perceptibles, 26.
 Liquides. — Vibrations longitudinales des liquides, 60. — Vibrations des surfaces liquides, 85. — Vitesse du son dans les liquides, 111.
 Logarithmes acoustiques, 23.
 Logographe, 181.
 Loi des vibrations des cordes, 72. — Loi de Ohm, 173.
 Longueur d'onde, 34.
 Lumière d'un tuyau, 55.
 Machine parlante, 185.
 Majeur (Accord parfait), 14. — Gamme majeure, 22. — Ton majeur, 17. — Mode majeur, 19.
 Mélodique (Gamme), 20.
 Mesure du nombre des vibrations, 6. — Mesure de la vitesse du son, 96, 107.
 Méthode de Kundt, 115. — Méthode optique pour l'étude des vibrations rectangulaires, 156.
 Microscope vibrant, 158.
 Milieu indéfini (Vibrations dans un), 83.
 Mineur (Accord parfait), 14. — Gamme mineure, 22. — Ton mineur, 17. — Mode mineur, 19.
 Modes majeur et mineur, 19.
 Nœuds de vibration, 39, 51.
 Notations allemande et française, 20.
 Octave, 13, 16, 18, 21, 26, 149, 191.
 Oléifiant (Gaz), 110.
 Origine du son, 1.
 Oufé, 189.
 Oxygène, 110.
 Palladium, 15.
 Phase, 34.
 Phonautographe, 145.
 Phonographe, 187.
 Piano, 177.
 Plaques, 126.
 Platine, 115.
 Poils auditifs des décapodes, 185.
 Porte-vent, 55.
 Porte-voix, 89.
 Propagation des vibrations longitudinales, 31. — Propagation des vibrations transversales, 64. — Propagation du son dans un milieu indéfini, 83.
 Qualités du son, 4.
 Quarte, 14, 16, 17, 23, 25, 151, 192.
 Quinte, 13, 16, 17, 23, 25, 150, 191.
 Rapport des vibrations longitudinales et transversales des cordes, 74.
 Rasette, 55.

- Réflexion du mouvement vibratoire,
 36; avec changement de signe,
 37; sans changement de signe,
 42. — Réflexion du son, 87.
- Réfraction du son, 91.
- Résonance, 164.
- Résonateurs, 174.
- Résultants (Sons), 139.
- Rigidité, 75.
- Roue dentée, 9.
- Secondes, 16, 25, 192.
- Septièmes, 16, 18, 21, 26.
- Sillage d'un navire, 86.
- Sirène, 6, 8. — Sirène à ondes,
 178.
- Sixtes, 16, 18, 21, 26.
- Sodium (Chlorure de), 114.
- Solides (Vibrations longitudinales
 des), 61. — Vitesse du son dans
 les solides, 114.
- Sonomètre, 69.
- Sons complexes, 170; sons et bruits,
 4.
- Soprano, 180.
- Soude (Azotate, carbonate et sulfate
 de), 114.
- Stroboscope, 160.
- Superflue (Seconde, tierce, etc.),
 25, 26.
- Synthèse du timbre, 178.
- Tempérament, 22.
- Ténor, 180.
- Théorème de Fourier, 142.
- Tierces, 14, 16, 17, 21, 23, 25, 192.
- Timbre du son, 5, 170, 176.
- Ton majeur et mineur, 17.
- Torsion (Vibrations engendrées par
 la), 81.
- Transversales (Vibrations), 64.
- Tuyaux sonores, 44. — Tuyaux ou-
 verts, 45. — Tuyaux fermés, 47.
 — Tuyaux coniques, 58.
- Unisson, 148.
- Variation (Sons de), 141.
- Ventres de vibration, 39, 51.
- Verges, 76, 160.
- Vibrations longitudinales, 29 —
 Vibrations transversales, 64. —
 Vibrations torsionnelles, 81.
- Violon, 172, 178.
- Vitesse de propagation des vibra-
 tions longitudinales, 31, 35. — Vi-
 tesse du son, 91.
- Vocables, 184.
- Vocales (Cordes), 183.
- Voix, 180.
- Voyelles, 180.
- Zinc, 115.

TABLE PAR NOMS D'AUTEURS

- DU PREMIER FASCICULE DU TOME TROISIÈME.

Académie de Florence, 97.
Académie des Sciences, 97.
Aristote, 1.

Barlow, 181.
Bauza et Espinoza, 97.
Beetz, 142.
Benzenberg, 97.
Bernoulli (D.), 45, 47, 53, 108.
Bianconi, 97.
Biot, 98, 107.
Bravais et Martins, 98.
Bureau des Longitudes, 98.

Cagniard de Latour, 6, 111.
Cassini et Huygens, 97.
Cauchy, 76.
Chladni, 82, 115, 120, 131.
Colladon et Sturm, 106.
Cornu et Mercadier, 21.
Corti, 189.

Derham, 97.
Desains et Lissajous, 159.
Despretz, 27.
Doppler, 117.
Duhamel, 10.
Dulong, 108.

Edison, 186.
Espinoza et Bauza, 97.

Faber, 186.
Flamsteed et Halley, 97.

Fourier, 143.
Franklin (Cap.), 97.

Grassi, 114.
Gregory, 97.
Guérout, 21.

Hajech, 91.
Halley et Flamsteed, 97.
Hase, 90.
Helmholtz, 27, 54, 58, 124, 140, 158,
167, 170, 174, 176, 177, 191.
Hensen, 189.
Hopkins, 120.
Huygens, 84.
Huygens et Cassini, 97.

Kästner, 97.
Kiessling, 121.
Kirchhoff, 54, 101, 131.
König, 50, 105, 124, 128, 131, 134,
139, 145, 174, 178, 184.
Kundt, 115.
Kundt et Lehmann, 116.

La Condamine, 97.
Lagrange, 130.
Laplace, 92, 93.
Lehmann et Kundt, 116.
Le Roux, 105.
Lissajous, 120, 151, 156, 158.
Lissajous et Desains, 159.
Lootens, 55.

- | | |
|--|---|
| <p> Martins et Bravais, 98.
 Mayer (J.-T.), 97.
 Mayer (M.), 186.
 Mecklemburg (Benno), 97.
 Melde, 163, 171.
 Mercadier, 158.
 Mercadier et Cornu, 21.
 Mersenne, 74, 97.
 Moncel (Du), 186.
 Müller, 97.

 Neumann, 105.
 Newton, 1, 92, 93.
 Niaudet, 186.
 Nörremberg, 123.

 Ohm, 173.

 Parry, 97.
 Plateau, 160.
 Poisson, 76, 83.
 Pythagore, 20.

 Quincke, 123.

 Radau, 130, 141.
 Regnault, 98 à 104.
 Romien, 130. </p> | <p> Sauveur, 136.
 Savart (F.), 9, 27, 62, 82, 161, 167.
 Savart (N.), 41, 76.
 Scheibler, 26, 138.
 Schneebeli, 101, 124.
 Scott, 145.
 Seebeck, 8, 76, 162, 173.
 Seebeck (A.), 101.
 Sondhaus, 91.
 Soret (J.-L.), 26.
 Sorge, 139.
 Strehlecke, 131.
 Sturm et Colladon, 106.

 Tartini, 139.
 Terquem, 152.
 Töpler, 160.

 Walcker, 97.
 Weber (frères), 86, 87.
 Weber (W.), 121.
 Wertheim, 56, 82, 96, 110, 112 à 114.
 Wheatstone, 128, 152, 182.
 Willis, 185.

 Zarlino, 20. </p> |
|--|---|

COURS
DE PHYSIQUE
DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.



COURS DE PHYSIQUE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR M. JAMIN.

QUATRIÈME ÉDITION

AUGMENTÉE ET ENTIÈREMENT REFONDUE

PAR

M. JAMIN,
Secrétaire perpétuel
de l'Académie des Sciences.

M. BOUTY,
Professeur
à la Faculté des Sciences de Paris.

TOME TROISIÈME.

2^e FASCICULE.

OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1886

(Tous droits réservés.)

COURS DE PHYSIQUE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

OPTIQUE.

INTRODUCTION.

Corps lumineux; corps transparents et corps opaques. — Propagation rectiligne de la lumière. — Ondes et rayons. — Division de l'Optique.

CORPS LUMINEUX, CORPS TRANSPARENTS ET CORPS OPAQUES. —

L'Optique a pour objet l'étude des phénomènes qui affectent l'organe de la vue, et d'où résulte pour nous la perception à distance des *formes* et des *couleurs* des corps.

Certains corps, dits *lumineux*, sont visibles par eux-mêmes; les autres ne le sont qu'autant qu'ils sont *éclairés*, et on les appelle *transparents* ou *opaques* suivant que, placés entre l'œil et le corps lumineux, ils laissent ou non subsister la sensation produite par celui-ci. Le bois, les métaux en lames d'épaisseur appréciable, sont opaques; l'air, le verre et l'eau sont transparents, le vide l'est aussi.

On rapporte l'origine des sensations lumineuses à une cause nommée *lumière*. Celle-ci ne peut être qu'un mouvement qui

se propage à partir des corps lumineux jusqu'à l'œil, à travers les milieux transparents. Les corps opaques *absorbent, diffusent, réfléchissent* la lumière; ils opposent donc un obstacle à la libre propagation de ce mouvement, et le modifient soit dans sa nature, soit seulement dans son intensité ou sa direction.

Puisque la lumière se propage dans le vide, on ne peut en faire une qualité purement afférente aux corps matériels, et cependant nous ne pouvons concevoir le mouvement sans invoquer l'existence d'un corps qui se meut. Il faut donc, ou bien que le mouvement lumineux appartienne à une matière très divisée émise, projetée dans l'espace avec une vitesse prodigieuse, par les corps lumineux; ou bien que l'espace vide de corps matériels proprement dits soit rempli par une substance élastique, capable de recevoir et de transmettre des vibrations, d'être affectée par les corps matériels et de réagir sur eux avec une égale intensité, en un mot par une matière analogue aux milieux élastiques que nous connaissons, mais qui en diffère tout au moins par sa propriété de ne point obéir à la loi de l'attraction newtonienne. *A priori*, les deux hypothèses, celle de l'*émission* et celle des *ondulations*, sont également intelligibles : l'une assimile la propagation de la lumière à celle des odeurs, l'autre à celle du son; l'une et l'autre exigent que la propagation lumineuse ne soit pas instantanée, et l'expérience prouve qu'il en est ainsi. Voyons maintenant comment ces théories expliquent la propagation rectiligne de la lumière.

PROPAGATION RECTILIGNE DE LA LUMIÈRE. — ONDES ET RAYONS. — Considérons une source lumineuse de faible diamètre apparent, par exemple une étoile, ou une lumière éloignée, et observons-la à travers un long tube rectiligne, fermé à ses deux extrémités par des écrans opaques percés d'un trou suivant l'axe du tube.

On constate que la vision a lieu seulement lorsque l'œil et la source lumineuse se trouvent sur le prolongement de l'axe. Ainsi la lumière se propage en ligne droite, tout au moins dans les conditions où l'expérience précédente réussit, c'est-à-dire

tant que les trous percés dans les deux écrans ne deviennent pas trop étroits. Si c'étaient de simples trous d'aiguille, la vision serait troublée, et le point lumineux observé paraîtrait entouré d'anneaux alternativement brillants et obscurs; mais c'est là un phénomène compliqué, une perturbation des lois ordinaires, dont nous pouvons faire abstraction provisoirement, en nous interdisant d'employer, dans nos expériences ultérieures, des ouvertures ou des écrans opaques trop petits.

On nomme *rayon lumineux* toute direction suivant laquelle de la lumière se propage. Le plus petit faisceau lumineux doué de la propriété de se propager exclusivement en ligne droite comprend une infinité de rayons.

Dans la théorie de l'*émission*, tout rayon est constitué par une série indéfinie de molécules lumineuses, parties de la source à des époques d'autant plus anciennes qu'elles en sont actuellement plus éloignées; la direction et la vitesse de leur mouvement de translation se confondent avec la *direction* et la *vitesse de propagation* de la lumière.

Dans cette hypothèse, le corps lumineux placé au sein d'un milieu homogène envoie des particules lumineuses dans tous les sens, et en quantité assez considérable pour que, dans le plus petit angle solide ayant son sommet au point lumineux, le nombre des particules envoyées pendant un temps très court soit proportionnel à cet angle (¹). Les particules lumineuses parties du point lumineux au temps 0 occupent au temps t la surface d'une sphère décrite de ce point comme centre avec un rayon Vt , et sont uniformément distribuées sur cette surface sphérique.

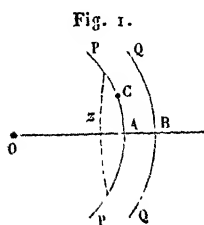
Dans la théorie des *ondes*, l'ébranlement dont la source lumineuse est le siège se propage dans l'éther environnant, et si cet éther est homogène, le mouvement produit est identique dans toutes les directions, de telle sorte qu'au bout d'un temps t quelconque l'ébranlement, produit au temps 0, s'est transporté à la surface d'une sphère de rayon Vt , et possède

(¹) Nous prenons ici pour mesure d'un angle solide la surface interceptée par cet angle sur une sphère décrite de son sommet comme centre avec un rayon égal à l'unité.

la même intensité, en chacun de ses points. Au point de vue pratique, ces deux théories conduisent donc au même résultat.

Remarquons toutefois que, dans la théorie des ondes, les rayons lumineux n'ont pas d'existence réelle : ce ne sont que les trajectoires orthogonales des ondes successives; il est donc nécessaire d'expliquer le fait de la propagation rectiligne de la lumière dans un tube ou à travers des écrans percés de trous.

Sans entrer dans des développements qui seraient ici prématurés, nous nous bornerons à observer que si, sur deux ondes sphériques infiniment voisines P et Q (fig. 1), issues d'un même point O, on prend les points A et B appartenant à un même rayon, le mouvement envoyé par l'onde P au point B provient, il est vrai, de tous les points de cette onde, mais que l'action exercée individuellement par un point tel que C



sera d'autant plus efficace qu'il sera plus voisin de A. Par suite, l'action de l'onde P sur B peut être sensiblement réduite à celle d'une zone efficace très étroite Az entourant immédiatement le point A; on pourra sans inconvénient intercepter le reste de l'onde, et ainsi pour les ondes suivantes. L'expérience seule fixera les limites au-dessous desquelles on ne devra pas restreindre la zone Az, sous peine de voir la propagation de la lumière cesser d'être rectiligne et obéir à des lois plus compliquées.

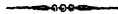
Les phénomènes de *diffraction* qui se produisent alors, et que nous avons signalés plus haut, sont prévus par la théorie des ondes; ils constituent l'une des plus redoutables objections que l'on puisse opposer à la théorie de l'émission, d'ailleurs abandonnée par les physiciens.

DIVISION DE L'OPTIQUE. — Toutefois rien ne nous oblige à nous décider dès maintenant pour l'une ou l'autre de ces théories. Le fait expérimental de la propagation rectiligne de la lumière suffit pour nous permettre d'établir une théorie géométrique de la marche des rayons directs, réfléchis par les corps polis,

ou réfractés par les corps transparents, et par suite d'étudier de nombreux instruments d'Optique, tels que microscopes, lunettes, etc., qui sont d'un usage général : tel est l'objet de l'*Optique géométrique*.

Nous pourrons ensuite étudier expérimentalement les diverses sortes de radiations (caractérisées par leur couleur, leur action calorifique ou chimique), au point de vue de leur réfrangibilité, de leur intensité et des modifications physiques qu'elles éprouvent par leur passage à travers les corps transparents isotropes, etc. Cette partie de l'Optique, dont l'objet se confond avec celui de la *chaleur rayonnante*, formera, sous le nom de *radiations*, l'objet de la seconde Partie de notre étude.

Enfin la troisième Partie, que nous appellerons l'*Optique physique*, sera consacrée à l'étude des phénomènes dont l'interprétation a imposé aux physiciens l'abandon de la théorie de l'émission, impuissante à les expliquer complètement : elle embrassera l'étude de la *diffraction*, de la *double réfraction*, de la *polarisation blanche ou colorée*, de la *polarisation rotatoire*, etc. Un dernier Chapitre sera consacré aux phénomènes de la vision et aux lois de l'*Optique physiologique*.



OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE.



CHAPITRE PREMIER.

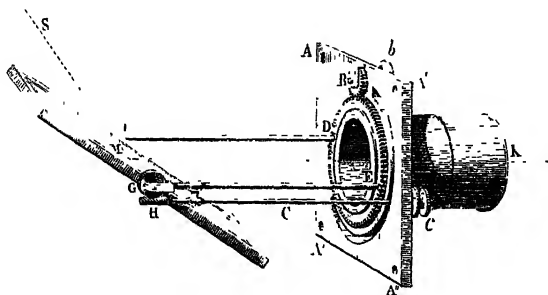
INSTRUMENTS GÉNÉRAUX DE L'OPTIQUE.

Porte-lumière. — Héliostat. — Conditions théoriques. — Héliostat de Foucault. — Héliostat de Silbermann. — Régulateur électrique. — Lumière Drummond. — Banc d'optique. — Cercles divisés.

PORTE-LUMIÈRE. — Avant tout, les expériences d'Optique exigent un laboratoire particulier nommé *chambre obscure*, entièrement peint au noir mat et dont on puisse hermétiquement fermer les fenêtres et les portes par des volets noirs, soigneusement garnis de bourrelets. Dans cette chambre, exactement soustraite à la lumière extérieure, il faut pouvoir introduire à volonté, par un petit trou, un faisceau solaire horizontal. A cet effet, on perce dans l'un des volets, exposé vers le midi, une ouverture ronde; on applique sur ses bords, au moyen de quatre vis, une plaque de cuivre verticale $AA'A''A'''$ (fig. 2). Celle-ci soutient, à l'extérieur du volet, un miroir M qui reçoit les rayons solaires S , M et qui les réfléchit à l'intérieur en MK , à travers un tube de cuivre. Mais, comme le faisceau réfléchi doit être fixe et que le Soleil se meut, il faut que l'on puisse, sans ouvrir le volet, déplacer continûment le miroir. Or il est porté par deux tiges FD et EH , fixées sur un anneau DE qui est appliqué contre la plaque AA'' , dont le contour extérieur est denté, et qui engrène avec le pignon B . Par le bouton intérieur b , on peut donc faire tourner le pignon B , l'anneau DE

et par suite le plan de réflexion SMK , jusqu'à ce qu'il passe par le Soleil S . En second lieu, le miroir est mobile autour d'un axe transversal LG , terminé par un pignon G , et une vis sans fin H , raccordée à un deuxième bouton c , permet de

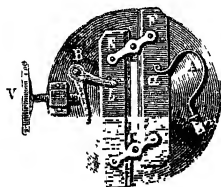
Fig. 2.



faire varier l'inclinaison du miroir jusqu'à ce que le faisceau réfléchi MK se dirige suivant l'axe horizontal du tube K .

Il est souvent nécessaire que ce faisceau soit limité en passant à travers une fente mince. Celle-ci (*fig. 3*) est placée sur un bouchon métallique qui ferme l'ouverture du porte-lumière. Elle est formée par les bords EC et DF d'un parallélogramme dont les deux autres côtés CD et EF sont mobiles autour de leurs milieux. Un ressort Aa , qui tend à relever FD et à baisser CE , fait fermer la fente; une vis V , en appuyant sur un levier Bb , relève EC , et par conséquent écarte ou rapproche à volonté les deux lèvres.

Fig. 3.



Si l'on veut que le faisceau émerge d'une ouverture circulaire, on emploie un autre bouchon représenté *fig. 4* et *4 bis*; le couvercle HD est percé d'un trou central G et prolongé par un tube court AB . Mais ce tube n'est fixé au couvercle HD que par une bride B , et il laisse entre lui et HD un intervalle de quelques millimètres. Dans cet intervalle, tourne autour de son centre C un disque $EF'F''$, que l'on voit de face (*fig. 4 bis*). Il est percé d'ouvertures F, F', F'', \dots , rangées par ordre de

grandeur et qu'on peut amener l'une après l'autre en regard du trou central G, qu'elles réduisent à leur propre dimension.

Fig. 4.

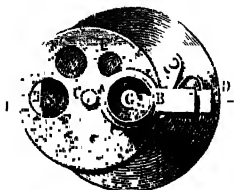


Fig. 4 bis.



HÉLIOSTAT. — Quand on emploie le porte-lumière que nous venons de décrire, il faut à chaque moment faire mouvoir les boutons directeurs du miroir pour ramener à une direction fixe le rayon réfléchi, que le mouvement du Soleil déplace continuellement. Cet inconvénient suggéra à Fahrenheit l'idée de l'*héliostat*, appareil dans lequel une horloge déplace continuellement le miroir, suivant des conditions calculées pour que le rayon réfléchi reste immobile. Cherchons d'abord la solution géométrique de ce problème.

CONDITIONS THÉORIQUES. — Soit NON' l'axe du monde (*Pl. II, fig. 1*). Pendant vingt-quatre heures le centre du Soleil décrit un cercle $SS'S''$; les rayons qu'il envoie en O parcourent un cône dont l'axe est ON et dont l'angle SON , ou COD , est égal au complément de la déclinaison du Soleil. Cette déclinaison est donnée par les Tables astronomiques pour tous les jours de l'année, elle est nulle aux équinoxes, maxima aux solstices.

Soit BDB' un cadran solaire parallèle à l'équateur; l'ombre du style DO sera en B à midi et parcourra le cercle en vingt-quatre heures. Si une horloge, placée au-dessous de BB' , fait tourner une aiguille DC d'un tour en vingt-quatre heures, cette aiguille suivra l'ombre du style DO . Par conséquent, une tige métallique OC , qui ferait avec le cadran un angle égal à la

déclinaison du Soleil et qui serait guidée en C par l'aiguille de l'horloge; suivrait pendant toute la journée la direction des rayons solaires. Il sera très facile de réaliser cette horloge et ce mouvement : c'est la première condition à laquelle satisfont les héliostats. La deuxième consisterait à placer, soit en O, soit en E, un miroir entraîné lui-même par l'horloge de façon à renvoyer les rayons dans une direction fixe OEC.

I. On aura une solution particulière du problème si l'on place en O un miroir dont la normale nOn' , entraînée par l'horloge avec le plan DOC, soit bissectrice de DOC; car, l'angle d'incidence étant $AO n'$, l'angle de réflexion sera $n'ON$ et le rayon sera réfléchi suivant l'axe du monde. C'est l'héliostat de Fahrenheit.

II. Soit mm le miroir. On veut donner au rayon réfléchi une direction fixe, mais absolument quelconque rOE . On y parviendra en dirigeant la normale à mm suivant la bissectrice $\beta\beta'$ de l'angle AOR; car, l'angle d'incidence étant $AO\beta'$, celui de réflexion sera $\beta'OR$ et le rayon réfléchi sera OR. On réalisera mécaniquement cette condition par un parallélogramme articulé $\alpha\beta\gamma O$, dont l'un des côtés γO aura la direction fixe qu'on veut donner aux rayons réfléchis, et l'autre $O\alpha$ sera maintenu par l'horloge dans la direction des rayons incidents OC. C'est l'héliostat de Silbermann (¹).

III. Supposons que le miroir soit en E, soutenu par un support EH pouvant prendre toutes les directions possibles, au moyen de deux articulations rectangulaires, et qu'il soit dirigé par une tige EC, normale à sa surface, passant dans un anneau C de l'aiguille des heures, à une distance CO constante et égale à OE, de sorte que le triangle COE soit isoscèle. Dans ce cas encore, le rayon se réfléchira suivant OE; car l'angle d'incidence sEc est égal à OCE, et l'angle de réflexion égal à OEC, ou à cER . C'est la solution de S'Gravesande (²).

IV. Disposons une tige OE de grandeur invariable, ne par-

(¹) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XVII, p. 1319, et *Annales de Chimie et de Physique*, 3^e série, t. X, p. 298; 1844.

(²) S'GRAVESANDE. *Physices elem. math.*, p. 715; voir aussi *Traité de Physique* de Biot, t. III, p. 175.

ticipant point au mouvement de l'horloge, pouvant prendre toutes les positions possibles autour de O et se fixer par des vis de pression dans la direction invariable qu'on veut donner au rayon réfléchi. A l'extrémité de cette tige, supportons le miroir par une fourchette *efe'*, tournant en *f* dans la tige *O/f* qui est creuse. De cette façon le miroir pourra tourner autour de deux axes *Of* et *ee'* perpendiculaires entre eux. Enfin faisons entraîner ce miroir au moyen d'une queue *EA* située dans son plan, perpendiculaire à *ee'* et passant en A dans un anneau articulé, à une distance *AO* égale à *OE*, de façon que le triangle *AOC* soit isoscèle.

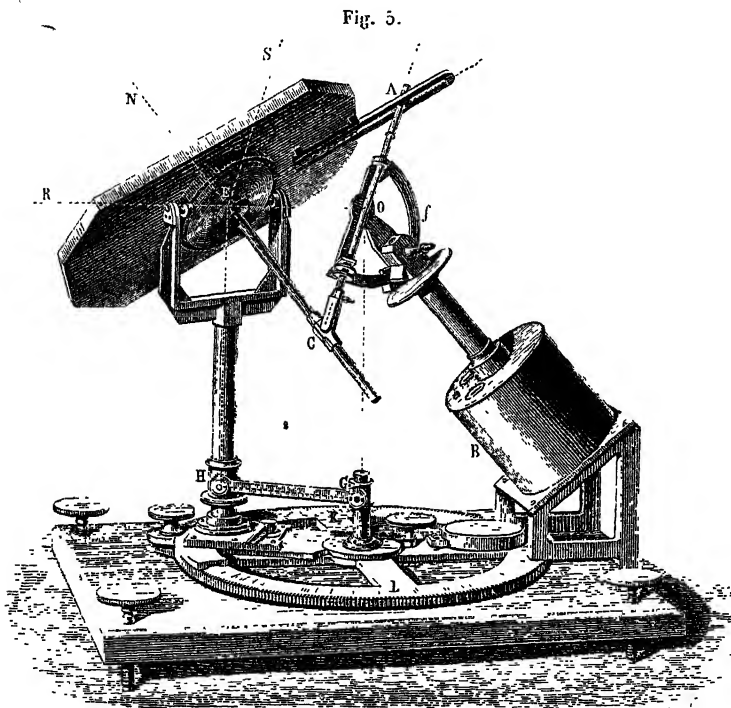
Si ces conditions sont réalisées : 1° le miroir est toujours perpendiculaire au plan *ACE* qui est le plan d'incidence et de réflexion ; 2° l'angle d'incidence *sEA* est égal à *OAE*, par conséquent l'angle de réflexion sera égal à *ΔEO*, ou à son opposé par le sommet *REa*, et le rayon sera réfléchi suivant *ER*. C'est l'héliostat de Gambey (1).

V. On peut enfin réaliser le triangle rectangle *CEA*, c'est-à-dire supporter le miroir en E par une colonne *EH* qui lui permette de prendre toutes les directions autour de E, le diriger par une tige *CE* normale à sa surface, s'engageant dans un anneau articulé C, fixé sur *OC* à une distance *OC = OE*, et enfin prolonger son plan par la tige *EA* passant en A dans une rainure creusée dans *OA*. Il est facile de voir que *AO* sera toujours égale à *OE*. Comme les besoins de l'Optique se bornent généralement à employer un rayon horizontal, on simplifiera le problème en ne demandant pas autre chose à l'héliostat. Alors la tige *OE* et le faisceau réfléchi *OE* seront horizontaux ; on les placera dans tous les azimuts possibles en faisant mouvoir le support *EH* sur un cercle horizontal dont le centre sera en G sur la verticale du point O, et dont le rayon *GH* sera égal et parallèle à *OE*. C'est la solution de Foucault (2).

(1) Décrit par Hachette ; voir *Ann. de Pogg.*, t. XVII, p. 71 ; 1831.

(2) Note de M. Duboscq, *Comptes rendus*, t. LIV, p. 618 ; 1862. Sur l'héliostat de Foucault, voir les Notes de M. Deville, *Comptes rendus*, t. LXIX, p. 1221 ; de M. Wolf, *Comptes rendus*, t. LXIX, p. 1222 ; et de M. Laugier, *Comptes rendus*, t. LXIX, p. 1226, publiées après la mort de Foucault (1869) ; voir en-

HÉLIOSTAT DE FOUCAULT. — Il reste à montrer comment on a réalisé ces conditions géométriques. Nous choisirons comme exemple les solutions de Foucault et de Silbermann. La *fig. 5* représente l'instrument de Foucault, dans la même situation et avec les mêmes lettres que la *Pl. II, fig. 1*; l'hor-



loge B est fixée préalablement à la latitude du lieu ; le point O est invariable ; toute la partie CfA est entraînée par le mouvement de l'horloge, et se trouve dans le plan du Soleil quand on a mis l'aiguille à l'heure. On a inscrit sur le limbe *f* la déclinaison du Soleil, et, en le fixant par une vis de pression dans la position qui convient au jour de l'observation, la

ligne AOC suit la direction des rayons solaires S, E. On recon-
naît le triangle rectangle CEA, qui entraîne le miroir. La lon-
gueur OC est invariable, égale à EO et à HG. On place le
rayon réfléchi OER dans l'azimut qu'on veut, en faisant mou-
voir la tige EH sur la circonférence d'un cercle KL, dont le
centre G est sous la verticale du point O; mais, pour que le
miroir puisse prendre toutes les positions voulues, il est né-
cessaire qu'il soit porté sur une base circulaire E, soutenue
sur la colonne EH par deux articulations rectangulaires, et
qu'en outre le miroir lui-même tourne sur cette base autour
de l'axe EC.

HÉLIOSTAT DE SILBERMANN.— L'appareil de Silbermann (*fig. 6*)
repose sur une plaque tournant autour d'un axe vertical qu'on
règle par un niveau. Au moyen d'un arc de cercle et d'un
bouton de serrage K, on incline l'axe de l'horloge à la latitude
du lieu, et l'on peut placer cet axe dans le méridien. Suppo-
sons que cela soit fait : BB représente le cadran, CPs un
limbe dont le centre est en O et dont le plan contient l'ai-
guille c, de sorte que, si l'on met celle-ci à l'heure vraie, ce
plan passe par le centre du Soleil. Le limbe CPs glisse dans
une boîte D, où il peut se fixer; il est divisé à partir de C, et,
en faisant CD égal au complément de la déclinaison, la ligne
SOC prend et garde la direction des rayons solaires.

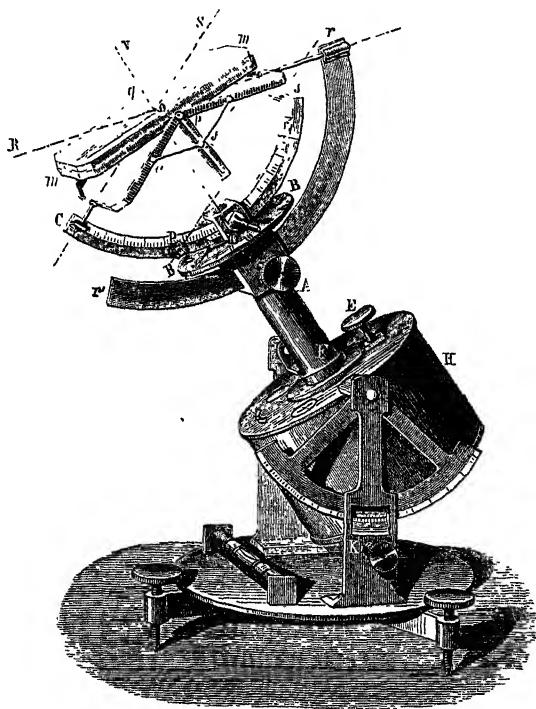
Suivant les conditions exprimées (p. 9), le miroir est porté
par un losange articulé; la diagonale *pf* est normale au
plan *mn*; le côté *pa* est, par construction, parallèle à OC, c'est-
à-dire aux rayons incidents, et les rayons réfléchis OR sont
alors parallèles à l'autre côté *pc* du losange.

Au moyen d'un second limbe *rr'* qui glisse dans une cou-
lisse et qu'on peut serrer par la vis A, on peut changer l'incli-
naison *per* de ces rayons réfléchis, et, pour qu'on puisse les
amener dans tous les azimuts possibles, le limbe *rr'* est porté
par un axe creux AF qui enveloppe, sans être entraîné par les
mouvements de l'horloge, celui qui fait mouvoir les aiguilles et
le premier limbe CPs. On peut fixer AF par un bouton de ser-
rage E.

On a disposé une pinnule *s* et un écran P, de façon que la

corde sP soit parallèle à OC , d'où il suit que le rayon qui passe en s arrive toujours en P si l'appareil est réglé ; et, inversement, on peut se servir de cette condition pour placer l'axe dans le méridien : car, ayant mis l'horloge à l'heure et pris

Fig. 6.

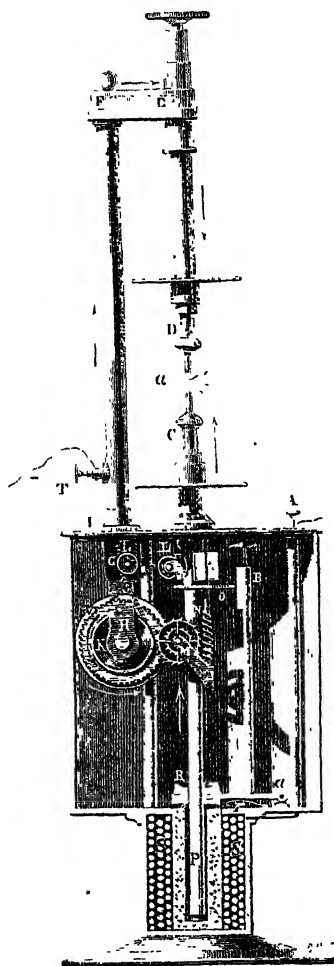


l'arc CD égal au complément de la déclinaison, on fera tourner l'appareil sur sa base jusqu'à voir le rayon solaire passer de s en P . On ne sera donc pas obligé de connaître la direction du méridien. Une disposition toute pareille est adaptée à l'héliostat de Foucault, et peut se joindre à tous les autres.

RÉGULATEURS ÉLECTRIQUES. — A défaut de rayons solaires, on emploie la lumière électrique ; mais il fallait la fixer, parce que

les charbons entre lesquels elle se dégage s'usent inégalement,

Fig. 7.



soit par la combustion, soit par le transport électrique. Mais comme, à mesure que cette usure les éloigne, le courant électrique éprouve une résistance croissante et perd de son intensité, Foucault ⁽¹⁾ imagine d'enrouler le conducteur autour d'un fer doux et d'utiliser les diminutions que son magnétisme éprouve pour embrayer un mécanisme qui rapproche les charbons et conserve au courant une intensité constante. Après Foucault, un grand nombre de physiciens ont imaginé des mécanismes, parmi lesquels nous citerons ceux de MM. Duboscq ⁽²⁾; Serrin ⁽³⁾ et Foucault ⁽⁴⁾ lui-même; mais nous ne décrirons que l'appareil de Duboscq (fig. 7).

Le courant arrive en A, descend par Aa jusque dans une bobine SS' qui enveloppe et aimante un fer doux creux. Il remonte ensuite jusqu'à la plate-forme IA; et, comme il y a en I une lame d'ivoire, il passe dans le charbon C, franchit dans l'air l'inter-

(¹) FOUCAULT, *Comptes rendus*, t. XXVIII, p. 68 et 698; 1849.

(²) DUBOSQ, *Comptes rendus*, t. XXXI, p. 807; 1850.

(³) SERRIN, *Comptes rendus*, t. L, p. 903; 1860.

(⁴) FOUCAULT, *Comptes rendus*, t. LXI, p. 1148; *Oeuvres de Foucault*, p. 313-322.

valle α , en donnant la lumière, et il revient enfin suivant DEFT. C, étant le pôle positif, s'use plus que D, et l'on peut déterminer par l'expérience le rapport des chemins que font les charbons en s'éloignant par l'usure. Il faudra que les mécanismes les rapprochent individuellement dans le même rapport, afin que le point lumineux reste fixe.

En H est un barillet avec ressort d'horlogerie, qui tend à faire mouvoir dans le sens des flèches deux tambours concentriques, l'un sur lequel passe une corde KGFE qui soutient le charbon D et le fait descendre quand le tambour tourne, l'autre porte une deuxième corde VL qui soutient par un contre-poids NP le charbon C, et celui-ci remonte par le mouvement du barillet. Ces deux tambours ont des diamètres inégaux et réglés pour imprimer aux deux charbons des déplacements proportionnels à leur usure.

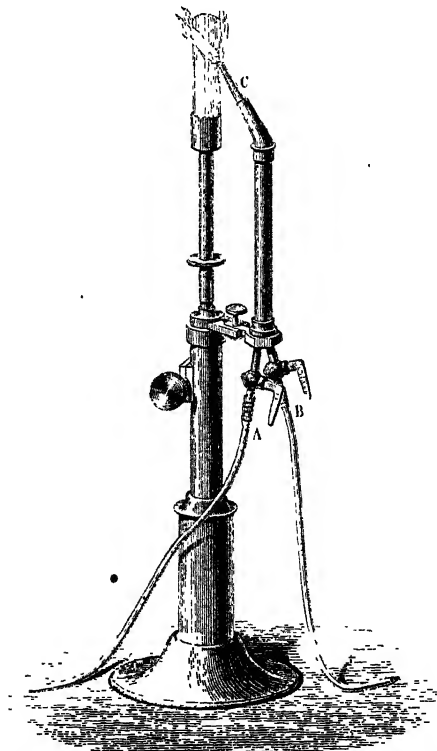
Le barillet engrène avec un pignon M; celui-ci meut une vis sans fin N et une roue dentée horizontale O, laquelle est enrayée par un couteau B. Mais ce couteau est un des bras du levier B a R; l'autre branche est un contact R placé sur l'électro-aimant, attiré par lui et soutenu par un ressort antagoniste r qu'on règle. Quand le courant passe et qu'il est fort, le contact R s'abaisse; le couteau B s'approche de la roue O; le mécanisme est enrayé, et les charbons sont immobiles. Ceux-ci s'usant, le courant s'affaiblit, le ressort r détache le contact R, le couteau B s'éloigne, les engrenages marchent: alors les charbons se rapprochent. Par cela même ils rendent au courant sa première intensité, et tout s'arrête de nouveau.

LUMIÈRE DRUMMOND. — Plus économique que la lumière électrique et presque aussi intense, la flamme de Drummond (¹) est aussi fort employée. Le gaz d'éclairage arrive par un robinet A (*fig. 8*); l'oxygène, qu'on prépare en grand, dans des cornues de fer, avec le chlorate de potasse, et que l'on conserve sous pression dans des sacs de caoutchouc, est amené par le robinet B dans un petit conduit intérieur qui

(¹) *Annales de Poggendorff*, t. VII, p. 120, et t. IX, p. 170; 1825.

débouche en C; les deux gaz ne se mélangent qu'au moment où ils s'enflamment, ce qui évite tout danger d'explosion. On laisse brûler continuellement le gaz d'éclairage, et l'on ne donne accès à l'oxygène qu'au moment de l'expérience. Les

Fig. 8.



deux courants arrivent obliquement sur un cylindre de chaux qui s'illumine avec un grand éclat, et qu'on peut élever ou abaisser au moyen d'une crémaillère.

Enfin, à défaut de ces sources vives, on se sert de lampes ordinaires. Quel que soit le luminaire qu'on emploie, il est utile de l'enfermer dans une boîte métallique (*Pl. I, fig. 1 et 2*).

La lampe A est au centre d'un miroir concave B où les rayons se réfléchissent normalement et, traversant la flamme, se mêlent à ceux qu'elle envoie dans la direction opposée. Elle est, en outre, au foyer d'une double lentille C, C' qui recueille ces rayons pour les diriger horizontalement en un faisceau parallèle XX, comme ceux qui viennent du Soleil.

BANC D'OPTIQUE. — On peut dire que toutes les expériences d'Optique consisteront à recevoir un faisceau de lumière sur des instruments spéciaux alignés suivant une droite horizontale XX, et que l'on aura le moyen de les exécuter toutes si l'on possède un appareil général qui permette de réaliser cet alignement. Cet appareil, tel que M. Jamin l'a installé à l'École Polytechnique, repose sur un banc horizontal ZZ. Il porte un chemin de fer YY, composé de deux rails parallèles et voisins, divisés en millimètres, sur lesquels glissent des patins tous semblables entre eux (*Pl. I, fig. 2, n° 5*), et qu'on peut fixer invariablement par une vis O' et un loquet O"; sur chacun d'eux s'élève une colonne verticale creuse, d'un calibre invariable, dans laquelle pénètre un rentrant tel que Q, qu'on peut élever, abaisser et fixer par une vis de pression P. Tous les appareils de l'Optique, sans exception, sont portés sur des rentrants de calibre uniforme; ils peuvent, en conséquence, venir prendre place chacun à leur tour sur les mêmes colonnes et s'aligner d'eux-mêmes sur le passage du rayon XX. Quelques-uns d'entre eux ayant besoin d'être ordonnés plus précisément, on a ajouté à quelques patins une coulisse normale aux rails, qu'on déplace par une vis de translation, telle que R, n° 6. Le banc montre dans la figure une série d'instruments ainsi disposés, depuis le n° 1 jusqu'au n° 9. Occupons-nous de ceux-ci.

Tous les physiciens savent quelle diversité de calibre offrent les organes de l'Optique. L'impossibilité où l'on est de les déplacer d'un appareil pour les porter sur un autre oblige les constructeurs à les multiplier sans augmenter les ressources d'un cabinet. Pour éviter ces graves inconvénients, on peut choisir par exemple trois calibres : l'un de 0^m,12, l'autre de 0^m,09 et le dernier de 0^m,06. Le plus gros est celui de l'ou-

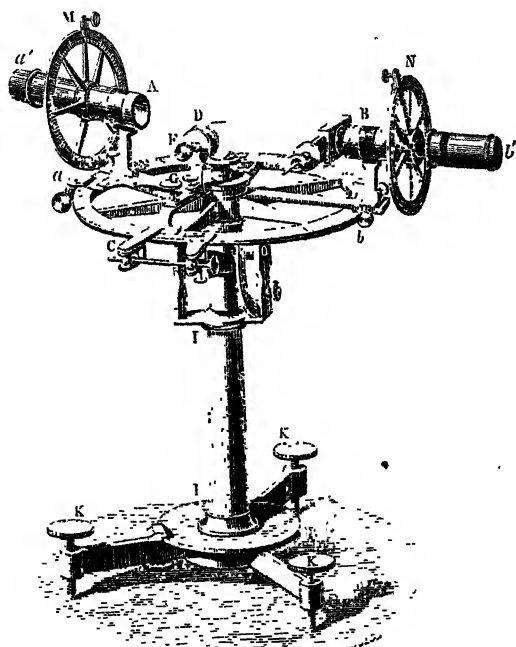
verture X; on y introduit ou des lentilles montées sur des tubes de même ouverture, ou des appareils de polarisation, ou des écrans percés, etc. D'autres tubes indépendants, tels que FF', reçoivent les mêmes organes et se placent en un point quelconque du banc. Le deuxième calibre, de 0^m, 09, a, comme le premier, ses jeux de lentilles, d'écrans et d'appareils divers. Il en est de même du troisième, et de cette façon un petit nombre d'organes généraux, qui n'ont point de places fixes, mais qui sont aptes à prendre celles que l'on veut, au moment où on le veut, suffisent à toutes les nécessités et dispensent d'acheter un appareil nouveau toutes les fois qu'on veut tenter une expérience nouvelle. On passe aisément du grand calibre au moyen et au petit par des raccords intermédiaires, qui réduisent la grande ouverture de 0^m, 12 à celle de 0^m, 09 ou 0^m, 06 (*Pl. I, fig. 4*).

Pour compléter cette organisation, économique autant que féconde, il reste à avoir des écrans fixes L, L (n^{os} 6 et 7), qui portent des bonnettes *m* et *n* qu'on peut faire tourner autour de leur axe XX au moyen d'un bouton *m'*. C'est sur ces appareils qu'on placera tous les instruments de la polarisation, par exemple des cristaux N et M (n^o 6) ou bien des miroirs (n^o 7). Enfin il sera commode d'avoir des collections de prismes, de tous les indices possibles, enfermés dans des écrans et se montant, quand le besoin se révèle, sur un pied commun.

CERCLES DIVISÉS. — Mais, toutes les fois que la lumière rencontre des surfaces réfléchissantes ou réfringentes, elle change de direction et l'expérimentateur est obligé de la suivre dans sa nouvelle route. Il emploie à cet effet des cercles divisés nombreux, portant différents noms et disposés chacun pour divers cas spéciaux. Ici encore il vaut mieux n'en posséder qu'un seul, le suivant, qui satisfait à tous les besoins. Il est représenté en perspective (*fig. 9*), et tous les détails en sont dessinés (*Pl. III, fig. 1 à 4*). Porté sur un pied à vis calantes, il peut d'abord tourner autour de son support vertical H, et ensuite se placer ou verticalement ou horizontalement, en tournant autour d'une charnière. Il y a trois alidades A, B, C munies de verniers *a*, *b*, *c* et de vis de rappel α , β , γ . Les deux

premières portent deux bonnettes de calibre A et B, où l'on peut introduire, soit deux lunettes a' A et b' B, soit des tubes à cercles azimutaux M et N, soit tout autre appareil qu'on voudra. La troisième alidade supporte quelquefois un appareil supplémentaire GFD sur lequel se placent les substances réfléchissantes D, qui se fixe sur l'alidade par une coulisse HH et qu'on serre par la vis G. Cette disposition permet de rapprocher ou d'éloigner la surface D du centre du cercle. Des vis de

Fig. 9.

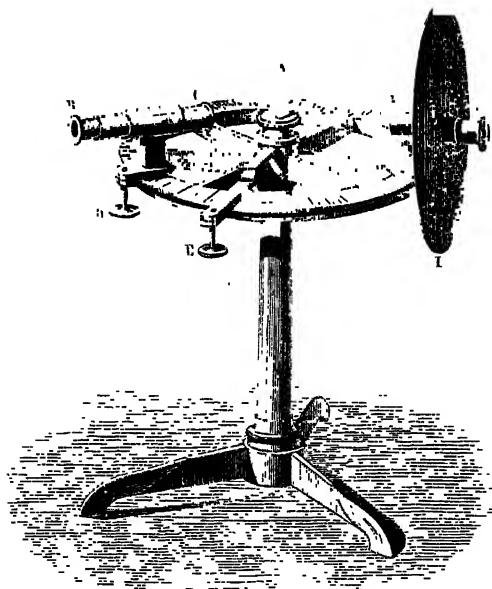


pression ee' servent ensuite à régler sa direction. On peut aussi fixer au centre du cercle O une plate-forme L (*Pl. III, fig. 15*) qu'on règle par des vis calantes l, l, l . C'est sur ce plan que se placent les prismes. Un cercle plus petit, construit suivant les mêmes principes, le goniomètre ⁽¹⁾ de Babinet (*fig. 10*), sa-

(¹) BABINET, *Comptes rendus*, t. VIII, p. 710; 1839.

tisfait à toutes ces conditions et suffit à presque toutes les expériences.

Fig. 10.



Nous connaissons maintenant les conditions générales de toutes les expériences d'Optique, et nous pouvons aborder l'étude des propriétés de la lumière.



CHAPITRE II.

OMBRES. — MIROIRS PLANS.

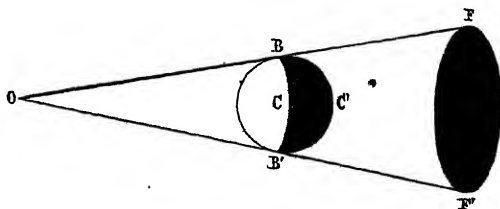
Ombres. — Chambre obscure.

Réflexion. — Loi expérimentale de la réflexion. — Image d'un objet dans un miroir plan. — Images réelles ou virtuelles. — Champ d'un miroir. — Déplacement de l'image quand le miroir se meut parallèlement ou angulairement. — Méthode de Poggendorff pour la mesure des déviations. — Sextant. — Mesure de l'angle dièdre d'un cristal.

Miroirs parallèles. — Miroirs inclinés.

OMBRES. — Un point lumineux unique O , placé devant un corps opaque, envoie un cône de rayons tangents BOB' (*fig. 11*). Tous les points du corps situés en avant de la ligne de con-

Fig. 11.

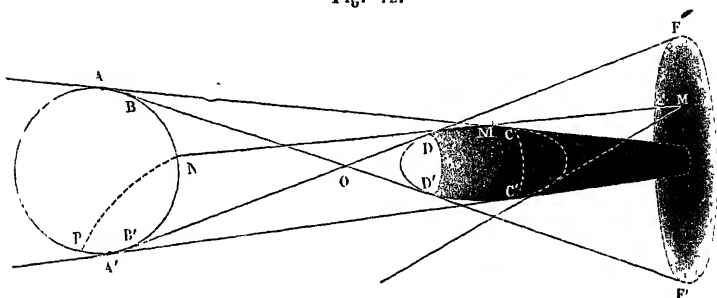


tact BCB' sont éclairés; tous ceux qui sont placés derrière sont dans l'obscurité. Tous les corps qui pénétreront dans le tronc de cône $FB'B'F$ s'éclipseront, et sur un écran vertical on verra se dessiner une ombre portée FF' .

Si, au lieu d'un point, nous avons une surface lumineuse AA' (*fig. 12*), il faudra mener des plans tangents intérieurs et extérieurs communs aux corps éclairant et éclairé. Si ces corps sont de révolution autour d'un même axe, comme

dans la *fig. 12*, les plans tangents intérieurs auront pour enveloppe un premier cône $AA'FF''$, dont le sommet est en O , et les autres un deuxième cône extérieur $AA'CC'$. Aucun rayon ne pénétrera dans celui-ci, qui découpera sur l'écran une ombre absolue. Mais l'espace compris entre les deux surfaces

Fig. 12.



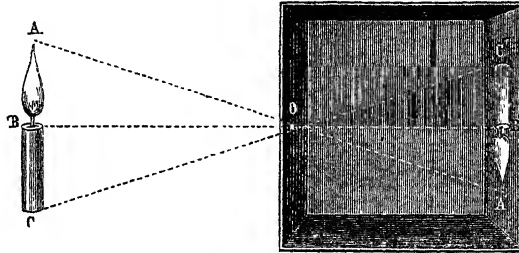
sera partiellement éclairé, et marquera une pénombre. Le point M , par exemple, ne verra pas la partie $NPA'B'$ du corps éclairant, mais seulement la portion supérieure ABN , et comme celle-ci, d'abord nulle, augmentera quand le point M ira de la limite de l'ombre à la limite FOF' , la pénombre se dégradera peu à peu jusqu'à se fondre insensiblement dans la lumière complète en FF' . Le point M' sera dans les mêmes conditions que M , et il y aura sur le corps une pénombre s'éclairant de plus en plus depuis CC' jusqu'à DD' .

CHAMBRE OBSCURE. — Quand les rayons partis d'un objet ABC (*fig. 13*) ne pénètrent dans une chambre obscure que par un trou O très étroit, ils peignent sur la paroi opposée l'image renversée de cet objet. En effet, parmi les faisceaux élémentaires envoyés par le point A , un seul traverse l'ouverture O , et, continuant sa route, va illuminer A' ; de même B et C éclairent B' et C' . La couleur des diverses parties de l'objet, le rapport de leurs éclairissements, toutes leurs conditions de forme, se reproduisent sur l'écran, où se peint une image renversée semblable à l'objet; par conséquent, le Soleil sera dessiné par un cercle, et, pendant une éclipse, on verra l'ombre

envahir progressivement l'image comme elle envahit l'astre lui-même, mais par le bord opposé.

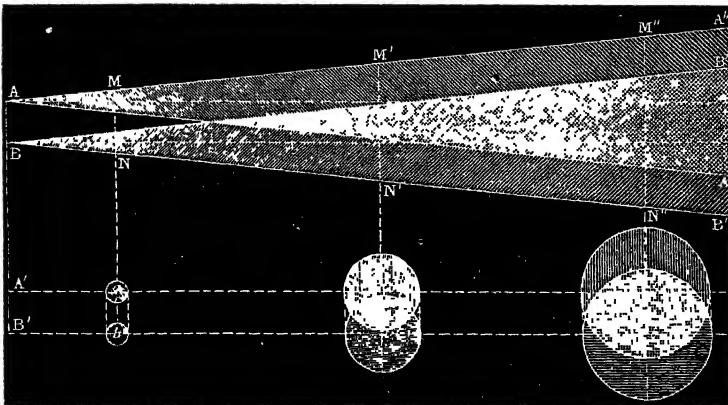
Les objets extérieurs, étant peu éclairés, forment des images difficilement visibles, à moins qu'on n'augmente l'ouverture O ; mais alors chaque point extérieur émet un cône qui a pour

Fig. 13.



base cette ouverture et marque sur l'écran une surface éclairée qui a la forme agrandie de cette base. Les images des points voisins empiètent l'une sur l'autre, et leur enveloppe cesse d'être nette; mais la forme générale reste semblable à l'objet et ne dépend pas de celle de l'ouverture.

Fig. 14.



Supposons, par exemple, qu'il y ait au volet une fente linéaire AB (fig. 14). Menons par A et B les rayons venus du

centre du Soleil ; ils seront parallèles et aboutiront en a, b sur le fond. Mais ceux qui viennent des bords de l'astre aux mêmes points seront sur deux cônes $A'AA'', B'BB''$ de $\frac{3}{2}'$ d'ouverture. Ces cônes, d'abord séparés, se pénétreront de plus en plus en s'éloignant du volet, et, si on les reçoit sur un écran, ils marqueront des cercles de plus en plus grands $a'b', a''b''$, qui, à une distance suffisante, sembleront n'en former qu'un seul. On finira donc par avoir encore l'image ronde du Soleil, un peu confuse sur les bords.

RÉFLEXION.

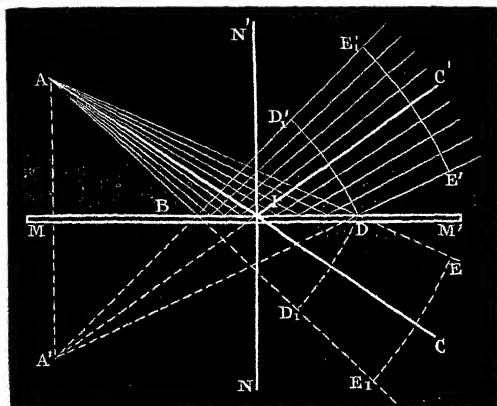
Quand la lumière rencontre une surface polie qui sépare deux milieux différents, elle se divise en deux parties : l'une qui se réfléchit et se propage dans le milieu antérieur, l'autre qui se réfracte et qui se transmet dans le deuxième milieu, s'il est transparent, ou qui est absorbée par lui à une petite distance de sa surface, s'il est opaque.

LOI DE LA RÉFLEXION. — Pour découvrir les lois de la réflexion, nous nous servirons du cercle divisé qui a été précédemment décrit (*Pl. III, fig. 1*). L'une des alidades A porte un simple tube $a'a''$ noirci intérieurement, éclairé en a' par une ouverture ronde au centre de laquelle se croisent deux fils rectangulaires. Sur l'autre alidade B est établie une lunette $b'b''$ avec un réticule et une vis de tirage. La surface réfléchissante est fixée en D. Au moyen d'une coulisse et de la vis G, on l'élève ou on l'abaisse jusqu'à la placer à la hauteur du centre du cercle divisé, et on la cale par la vis e, e' , de telle sorte que les images réfléchies par elle, et observées par la lunette $b'b''$, ne se déplacent pas quand on la fait tourner, par le bouton F, autour d'un axe FD qui est parallèle au plan du limbe : on est alors assuré que la lame réfléchissante est normale à ce plan. Pour achever de régler l'expérience, il suffira de placer verticalement la lunette $b'b''$ au zéro de la division du cercle, et d'amener, par l'alidade γ , la plaque D dans une position telle, que l'image, réfléchie par elle, des fils du réticule se voie dans la lunette en coïncidence avec eux-mêmes. Par raison de symétrie, la lunette sera normale à la plaque, et, en la faisant

On peut interpréter cette loi de deux manières, correspondant aux deux modes de représentation adoptés pour se figurer la propagation de la lumière.

I. Si l'on représente le mouvement lumineux parti de A par des ondes sphériques concentriques, telles que DD_1 , EE_1 , ... (fig. 16), celui qui viendrait d'un point symétrique A' serait figuré par d'autres ondes qui arriveraient au même moment

Fig. 16.

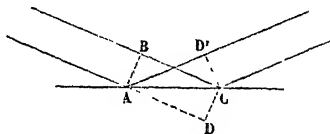


sur les sphères DD' , EE' , ..., et seraient symétriques des premières. Dès lors :

« Les ondes émises par un point lumineux se changent par la réflexion en d'autres ondes, qui au même moment sont symétriques des premières par rapport à la surface polie. »

Dans le cas où le point lumineux est à l'infini, la surface

Fig. 17.



d'onde incidente DC est plane, la surface réfléchie CD' l'est également; toutes deux restent symétriques (fig. 17).

II. Si nous supposons, au contraire, que l'effluve lumineuse émanée de A soit décomposée en rayons élémentaires, tels que AIC (fig. 16), l'effluve partie du point symétrique A' pourra se décomposer de la même manière en rayons tels que A'IC'. Alors on pourra dire :

1° Qu'à un rayon incident AI correspond un rayon réfléchi IC' ;

2° Que le plan d'incidence AIN', mené par le rayon incident et la normale IN' est confondu avec le plan de réflexion N'IC' ;

3° Que l'angle d'incidence AIN' est égal à l'angle de réflexion N'IC'.

Bien que cet énoncé soit généralement adopté, c'est celui qui s'écarte le plus de l'observation. Il ne faut pas oublier que, la décomposition du faisceau en rayons linéaires étant entièrement conventionnelle, l'idée qui les représente comme se réfléchissant individuellement est fictive au même titre ; et en effet, aussitôt qu'on cherche à réduire un miroir à une seule ligne I perpendiculaire au plan d'incidence, on voit apparaître les phénomènes de diffraction que nous avons réservés précédemment. Ce qui est seul réel et strictement conforme à l'expérience, c'est que nous voyons la lumière réfléchie comme si elle partait d'une image symétrique de l'objet.

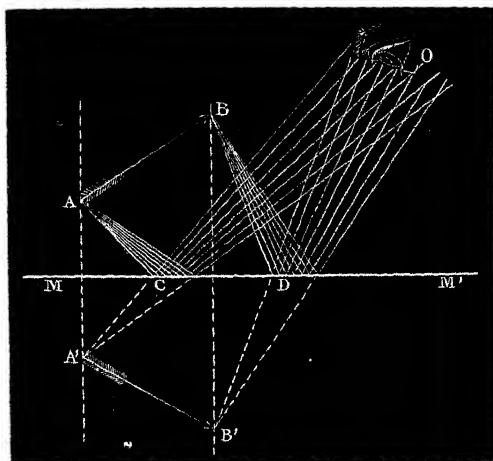
IMAGES RÉELLES ET VIRTUELLES. — Cette restriction établie, nous pouvons continuer notre étude au point de vue purement géométrique. Nous venons de reconnaître que les rayons fictifs émanés d'un point lumineux A se réfléchissent dans un miroir plan, de telle sorte que leurs prolongements passent par le point A' symétrique de A, et nous avons appelé A' l'image virtuelle de A. Réciproquement, si un faisceau de rayons lumineux E'DE', B converge vers un point A', placé derrière le miroir plan M, ces rayons iront, après réflexion, converger au point A symétrique de A'. On dit que A est l'*image réelle* du point virtuel A'.

Désignons l'angle BAD, d'un faisceau limité de rayons, sous le nom d'*angle de divergence* ou de *convergence* du faisceau, suivant que le corps lumineux est situé du côté de la pointe ou de la base du cône ; on reconnaît qu'un miroir plan

frappé par un faisceau limité n'en modifie ni la divergence, ni la convergence. Quand le faisceau incident est constitué par des rayons parallèles, c'est-à-dire par des rayons dont l'angle de convergence est nul, il en est de même pour le faisceau réfléchi, qui est aussi formé de rayons parallèles (*fig. 17*).

IMAGE D'UN OBJET. — Si la lumière part d'un objet réel AB (*fig. 18*), chacun de ses points A ou B a son image virtuelle

Fig. 18.

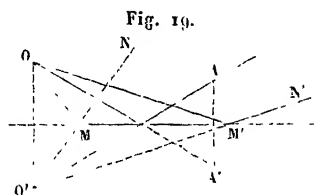


en A' ou B', et l'œil, placé en O, reçoit les faisceaux réfléchis comme s'ils étaient envoyés par un objet symétrique A'B'.

Si l'objet AB est linéaire, l'angle de AB avec son image A'B' est double de celui qu'il fait avec la surface MM' du miroir; d'où il résulte qu'un objet vertical est vu horizontal dans un miroir incliné à 45° , et réciproquement.

CHAMP D'UN MIROIR. — Un miroir MM' étant nécessairement limité ne reçoit d'un point lumineux O qu'un faisceau limité MOM' de rayons, auquel correspond un faisceau réfléchi NO'N' de même angle.

Il suit de là que l'œil, placé en O au dessus du miroir, apercevra ou n'apercevra pas l'image A' d'un point A suivant que



le point sera ou non compris dans l'espace $NMM'N'$, désigné sous le nom de *champ du miroir* relativement au point O ⁽¹⁾.

DÉPLACEMENT DE L'IMAGE QUAND LE MIROIR SE MEUT PARALLÈLEMENT OU ANGULAIREMENT. — Si un miroir MN se déplace parallèlement à lui-même d'une quantité a jusqu'en $M'N'$ (*fig. 20*),

Fig. 20.

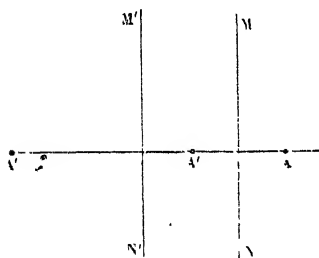
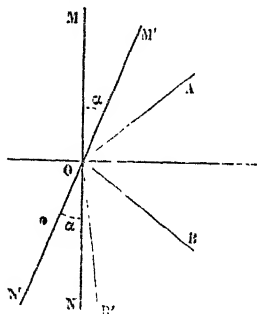


Fig. 21.



l'image qui était en A' , à une distance de A égale à $2d$, se place en A'' , à une distance $2(d + a)$. La différence $A'A''$, c'est-à-dire le déplacement de l'image, est $2a$; elle est égale au double du mouvement du miroir.

Il en est de même pour le cas où le miroir se déplace angulairement (*fig. 21*). Soient NOM la première position du

(¹) Un point virtuel O' diffère d'un point lumineux réel O en ce qu'il n'est visible que dans un angle déterminé $NMM'N'$.

miroir, AO et OB les rayons incident et réfléchi. L'angle

$$AOM = BOM = i.$$

Quand le miroir tourne d'un angle α et se place en N'OM', l'angle d'incidence diminue de α ; le rayon réfléchi est OB', et l'on a

$$N'OB' = i - \alpha, \quad N'OB = i + \alpha,$$

$$B'OB = N'OB - N'OB' = i + \alpha - (i - \alpha) = 2\alpha;$$

par conséquent l'angle des deux rayons réfléchis est égal au double du déplacement angulaire donné au miroir.

MÉTHODE DE POGGENDORFF POUR LA MESURE DES DÉVIATIONS. — Les physiciens ont fait de nombreuses applications de cette dernière propriété, pour amplifier de très faibles déplacements linéaires ou angulaires. C'est ainsi que le levier du comparateur (1) peut être remplacé par un miroir mobile autour d'un axe et sur lequel on fait tomber normalement un faisceau de rayons lumineux parallèles; les deux faisceaux incident et réfléchi constituent les deux bras d'un véritable levier optique, dont on peut augmenter presque indéfiniment la sensibilité en écartant l'écran sur lequel les rayons réfléchis sont reçus. La même disposition peut être employée pour rendre visible la dilatation des solides par la chaleur, etc.

Le meilleur emploi de cette méthode, imaginée par Poggendorff (2), employée et vulgarisée surtout par Gauss et par Weber, consiste dans la mesure des déviations d'une aiguille de galvanomètre ou d'un barreau aimanté librement suspendu. On fixe au support de l'aiguille ou du barreau un petit miroir vertical M (3), et l'on installe en avant de l'appareil une règle

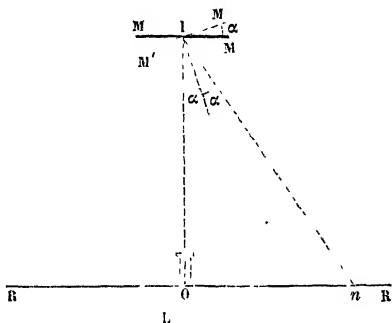
(1) Voir tome I^{er}, au Chapitre des instruments de mesure.

(2) POGGENDORFF, *Instrument zum Messen der magnetischen Abweichung* (*Ann. de Pogg.*, t. VII, p. 121; 1825).

(3) On fait des miroirs plans, en platine argenté, très légers, et qui peuvent être collés sur le support de l'aiguille astatique d'un galvanomètre. Les grands barreaux aimantés peuvent porter des miroirs plus lourds, ou être polis sur leur face antérieure, etc.

horizontale RR , dont on observe l'image, donnée par le miroir, à l'aide d'une lunette L (*fig. 22*). L'axe optique de celle-ci est perpendiculaire au miroir et à la règle, et l'appareil est réglé de telle sorte que, quand l'aiguille est au zéro, on voit l'image de la division o de la règle se former sous la croisée des fils de la lunette. Quand le miroir a tourné d'un angle α , le rayon réfléchi dirigé suivant IL correspond à un rayon incident tel que nI , et l'on voit par conséquent sous les fils l'image d'une division n de la règle.

Fig. 22.



En prenant pour unité de longueur une de ces divisions, on a

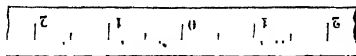
$$\tan 2\alpha = \frac{n}{IL},$$

et, tant que la déviation α est suffisamment petite, approximativement

$$\alpha = \frac{n}{2IL};$$

α est donc proportionnel à n . Il est bon, pour faciliter la lecture, d'employer une règle (*fig. 23*) sur laquelle les chiffres sont renversés, de façon que l'image vue dans la lunette soit droite.

Fig. 23.

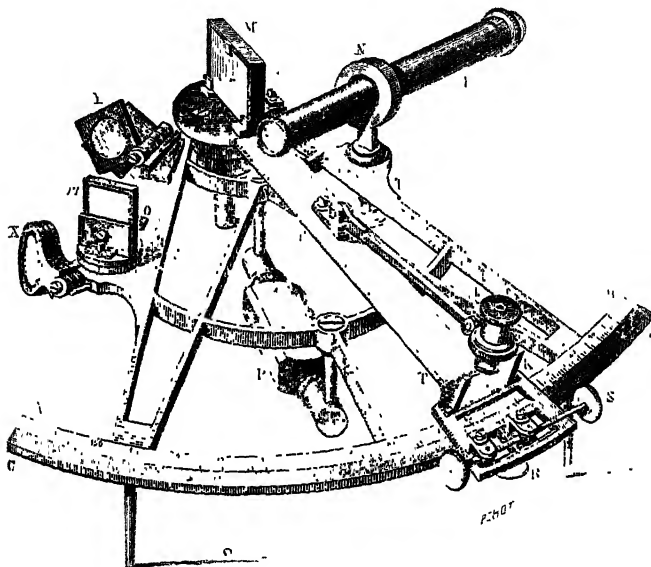


Au lieu d'un miroir plan M , on emploie sou-

vent un miroir concave ayant son centre de courbure en L ; la lunette est remplacée par une lampe à cheminée de cuivre munie d'une fente verticale; l'image réelle de cette fente vient se peindre sur la règle; la déviation α est encore proportionnelle à l'écart On de la tache lumineuse.

SEXTANT ⁽¹⁾. — Le sextant est fondé sur l'application du même principe. Cet instrument (*fig. 24*) permet d'observer l'angle de direction de deux astres *O* et *O'*, à l'aide d'une lunette *NF* et de deux miroirs *m*, *M*, perpendiculaires au plan d'un limbe dont l'ouverture est d'environ 75° . Le miroir *m* est

Fig. 24.



fixe : sa moitié supérieure est désétamée et permet d'apercevoir directement l'astre *O*, sur lequel la lunette *NF* demeure braquée ; la moitié inférieure du miroir réfléchit vers la lunette des rayons déjà réfléchis par *M*. Ce dernier miroir est fixé, au centre du limbe, sur un disque mobile *D* entraîné par une ali-

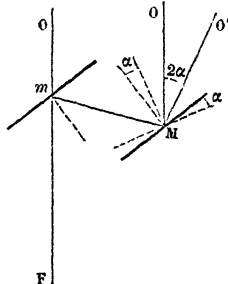
(¹) Le sextant a été imaginé par Newton en 1700, et décrit dans une lettre à Halley, retrouvée dans les papiers de celui-ci et qui a été publiée en 1742 dans les *Transactions philosophiques* ; en 1731, un physicien nommé Hadley publia de son côté la première description du sextant (*Transactions philosophiques*). On lui en attribue généralement l'invention.

dade munie d'une vis de rappel SEF (fig. 24), et l'on détermine la position de celle-ci à l'aide d'un vernier adapté à la division du limbe et d'un microscope L.

Quand l'alignement est au zéro, les miroirs m et M sont parallèles et le rayon direct OmF coïncide, dans sa portion mF , avec le rayon deux fois réfléchi $OMmF$ issu du même astre (fig. 25).

Faisons mouvoir l'alidade, sans déplacer la lunette, jusqu'à ce que le rayon Mm , une fois réfléchi, provienne d'un rayon incident $O'M$ issu de l'astre O' ; l'angle $O'MO$ qu'il s'agit de mesurer est double de l'angle α dont le miroir M , et par conséquent l'alidade, ont dû tourner. On lit directement l'angle 2α sur le limbe AB (*fig. 24*), où les demi-degrés sont marqués comme des degrés.

Fig. 25.



MESURE DE L'ANGLE DIÈDRE D'UN CRISTAL. — La mesure des angles dièdres des cristaux est d'une haute importance, non seulement pour le minéralogiste, mais encore pour le physicien. Cette mesure, fondée sur les lois de la réflexion, peut être opérée par divers procédés, parmi lesquels nous signalerons les suivants :

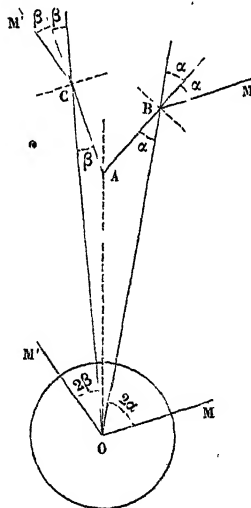
1° L'arête du dièdre est disposée verticalement sur un support fixe, et l'on vise à l'aide d'une lunette, mobile au centre O d'un cercle divisé horizontal (*fig. 26*) : 1° deux mires verticales très éloignées M et M'; 2° leurs images vues par réflexion dans les faces AB et AC du cristal. L'angle CAB est la somme des angles extérieurs en A aux triangles OAC et OAB, et par suite

$$A = COB + OCA + OBA.$$

COB est donné par l'observation directe ; les angles $OCA = \beta$ et

J. et B., *Optique*. — III. 2^e fasc.

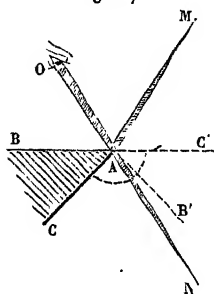
Fig. 26.



$OBA = \alpha$ sont respectivement égaux aux moitiés des angles COM' et BOM donnés aussi par l'observation.

2° L'arête du dièdre est placée horizontalement et de façon à être perpendiculaire au centre d'un limbe vertical divisé. On

Fig. 27.



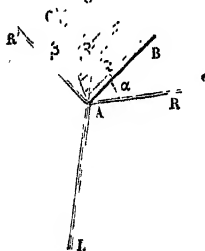
place l'œil (*fig. 27*) près de l'arête A, de manière à apercevoir directement une mire éloignée horizontale N, et l'on fait tourner le limbe, en regard d'un index fixe, jusqu'à ce que l'image d'une autre mire éloignée horizontale M, vue par réflexion dans la face AB du cristal, se confonde avec N. On fait alors tourner le limbe jusqu'à ce que la face cristalline AC se soit substituée à AB en AC', ce que l'on reconnaît à la coïncidence de N avec

l'image de M. La différence des lectures exécutées sur le limbe est le supplément de l'angle A (goniomètre de Wollaston).

La mire M est d'ordinaire l'arête horizontale d'un toit; la mire N, l'image de M dans un miroir adapté au support de l'appareil et dont le plan est perpendiculaire à celui du limbe.

3° Le cristal est installé avec son arête verticale au centre du cercle divisé de la *fig. 10*, sur lequel se déplacent la lunette BC et le collimateur FG. Un pinceau de rayons parallèles

Fig. 28.



est dirigé par celui-ci sur l'arête A du dièdre à mesurer (*fig. 28*); ce faisceau LA se divise en deux autres AR et AR', réfléchis par les deux faces et faisant entre eux un angle double de l'angle A. Le déplacement qu'il faut donner à la lunette, pour recevoir successivement les deux

rayons réfléchis, donne la valeur de l'angle RAR' [goniomètre de Babinet ⁽¹⁾].

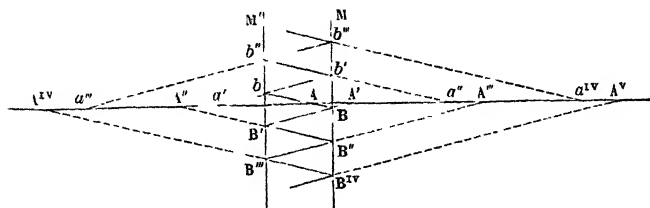
Quelle que soit la disposition adoptée, il faudra d'abord s'assurer que l'arête du cristal présente bien la situation rigoureusement verticale ou horizontale qu'on lui a assignée

(¹) *Comptes rendus*, t. VIII, p. 710; 1839.

dans les explications précédentes. S'il s'agit, par exemple, du goniomètre de Babinet, on doit voir le fil vertical du réticule de la lunette se superposer exactement à l'image d'un fil tendu verticalement dans la fente du collimateur, fournie par l'une et l'autre face du dièdre. De même, pour le goniomètre de Wollaston, on doit pouvoir amener la coïncidence exacte de l'image de M avec N, dans les deux situations du cristal.

MIROIRS PARALLÈLES. — Soient M, M' deux miroirs parallèles (fig. 29), A un point lumineux, et considérons un mince faisceau issu de ce point et ayant pour axe AB; il se réfléchit d'abord sur le miroir M en B, puis sur M', etc.. un nombre indéfini de fois. Après chaque réflexion le faisceau diverge

Fig. 29.



comme s'il était issu du point où son axe rencontre la perpendiculaire AA' menée du point A aux miroirs. On pourra donc apercevoir une série indéfinie d'images A', A'', ..., provenant des réflexions successives des rayons qui rencontrent d'abord le miroir M.

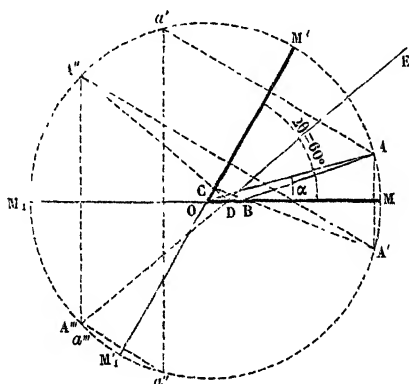
On reconnaîtra de même qu'on obtient une seconde série d'images a', a'', en considérant les rayons qui frappent d'abord le miroir M'. Si l'on remplace le rayon lumineux A par un petit objet présentant une face bleue vers M, une face rouge vers M', les images du système A seront bleues, celles du système a seront rouges.

Soient d la distance des deux miroirs, l la distance du point A au miroir M; on reconnaîtra sans peine que deux images consécutives, du système A, A' et A'' par exemple, sont à une distance $2d$ l'une de l'autre, et qu'il en est de même de deux

images du système α ; mais deux images de système différent sont alternativement à la distance $2l$ et $2(d-l)$.

MIROIRS INCLINÉS. — Soient deux miroirs OM et OM' dont les plans font un angle $MOM' = 2\theta$ et un point A. Considérons un mince faisceau lumineux issu de A et ayant pour axe AB; ce faisceau se réfléchit un certain nombre de fois en B, C, D sur les deux miroirs, donnant naissance aux images A', A'', A''', jusqu'à ce que la direction DE du dernier rayon réfléchi fasse, avec le miroir qui l'a réfléchi en dernier lieu, un angle moindre

Fig. 30.



que 2θ ; et alors il échappe à toute nouvelle réflexion et ne fournit plus d'images. On reconnaîtra de même qu'un faisceau réfléchi d'abord sur le miroir M' donne un autre système d'images a' , a'' , a''' . Toutes les images de l'un ou de l'autre système étant disposées symétriquement par rapport aux plans OM et OM' sont distribuées sur un cercle décrit de O comme centre avec OA pour rayon.

Le lecteur pourra utilement discuter les divers cas qui se présentent. Nous nous bornerons à indiquer les principaux résultats :

1° Désignons par α l'angle AOM; on reconnaîtra sans peine que deux images consécutives, que l'on rencontre en parcourant le cercle dans un sens invariable, sont séparées par des

distances angulaires alternativement égales à 2α et $2(2\theta - \alpha)$, à l'exception des deux dernières images dont la distance peut être quelconque. Quand le point A est situé sur la bissectrice de l'angle MCM' ($\alpha = \theta$), toutes les images, sauf les deux dernières, sont équidistantes.

2° La dernière image d'un système, A'' par exemple (fig. 30), se trouve toujours dans l'angle $M_1OM'_1$ opposé par le sommet à MOM'. Il y a toujours dans cet angle une image de chaque système.

3° Quand l'angle 2θ est une partie aliquote de la circonférence, $\theta = \frac{\pi}{n}$, toutes les images, sans exception, sont aux sommets d'un polygone fermé dont les côtés sous-tendent alternativement les angles 2α et $2(2\theta - \alpha)$; pour $\theta = \frac{\pi}{2n}$ les deux dernières images A'' et a'', par exemple, se confondent; la fig. 30 est faite pour $\theta = \frac{\pi}{6}$ et montre cette particularité.

Le kaléidoscope (1) est un tube cylindrique opaque contenant deux miroirs inclinés à 60° , dont l'intersection est dirigée suivant l'une des génératrices du cylindre; dans ce tube se trouvent des objets diversement colorés formant une figure que les miroirs répètent six fois : l'œil, placé à l'extrémité du tube opposée à celle par où pénètre la lumière, aperçoit donc un champ circulaire brillant, formé de la réunion de six secteurs identiques.

(1) Le kaléidoscope, sous sa forme actuelle, a été imaginé par Brewster en 1817. (Voir *Ann. de Gilbert*, t. LIX, p. 317 et suiv.) Cent ans plus tôt, R. Bradley avait employé une disposition analogue (*New improvements of planting and gardening*, 1710).

Il est à remarquer que le cas $\theta = \frac{\pi}{2n}$ est le seul qui se prête à la confection du kaléidoscope, parce que c'est le seul pour lequel les $2n - 1$ images du secteur compris entre les deux miroirs n'empiètent pas les unes sur les autres.

CHAPITRE III.

MIROIRS SPHÉRIQUES.

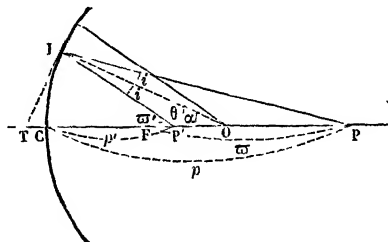
Miroirs sphériques concaves. — Théorie élémentaire. — Discussion. — Axes secondaires. — Rapport des dimensions de l'image à celles de l'objet. — Vérifications expérimentales. — Miroirs convexes. — Mesure du rayon des miroirs. — Aberration. — Caustiques. — Miroirs paraboliques. — Miroirs coniques.

Quand des rayons lumineux issus d'un point P tombent sur une surface courbe polie, les rayons réfléchis forment un faisceau de droites qui, en général, ne se rencontrent pas, et par suite il n'y a pas d'image dans le sens propre du mot. Toutefois il est possible de déterminer une surface par la condition que tous les rayons partis d'un point P , dont la situation est déterminée, se rencontrent, après réflexion, en un autre point P' situé sur les rayons réfléchis eux-mêmes ou sur leur prolongement. Une telle surface est dite *aplanétique* par rapport au point P ; mais, en général, elle ne possède cette propriété que pour un seul couple de points P et P' .

Mais, si l'on se borne à considérer des surfaces réfléchissantes de faible courbure et d'étendue médiocre, l'aplanétisme peut être réalisé simultanément pour tous les points de l'espace situés sur une normale au miroir, non d'une manière rigoureuse, mais d'une manière approchée : c'est-à-dire de telle sorte que les rayons issus d'un point quelconque P forment, après réflexion, un faisceau passant sensiblement par un même point P' qui, physiquement, est l'image réelle ou virtuelle du point P . La condition à remplir est que la surface réfléchissante possède la même courbure dans tous les sens et en tous les points, c'est-à-dire qu'elle soit sphérique.

MIROIRS SPHÉRIQUES CONCAVES. — Considérons un miroir sphérique de très faible ouverture. Soient C (*fig. 31*) son centre de figure, O son centre de courbure (ou centre de la sphère de rayon R à laquelle il appartient); OC est ce que l'on appelle l'*axe principal du miroir*.

Fig. 31.



Nous supposons d'abord le point P placé sur cet axe, et nous considérerons un rayon incident PI quelconque. La normale OI fait avec l'axe

un angle α plus petit que la demi-ouverture du miroir.

Cette normale est bissectrice de l'angle PIP', et la tangente IT au point I, bissectrice extérieure du même angle. On a donc, d'après un théorème connu,

$$\frac{OP'}{OP} = \frac{TP'}{TP} = \frac{OT - OP'}{OT + OP'};$$

on tire de là

$$(1) \quad \frac{1}{OP'} = \frac{1}{OP} + \frac{2}{OT} = \frac{1}{OP} + \frac{2 \cos \alpha}{R};$$

le point P est fixe : le point P' varie donc avec la valeur de α . Toutefois, α étant très petit, on peut remplacer $\cos \alpha$ par la série convergente $1 - \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} - \dots$ en s'arrêtant au degré d'approximation qu'il conviendra d'atteindre.

Supposons d'abord que l'ouverture 2θ du miroir soit assez petite pour que les quantités de l'ordre de θ^2 soient négligeables, on se bornera à prendre le premier terme dans la valeur de $\cos \alpha$, et l'on aura

$$(1 \text{ bis}) \quad \frac{1}{OP'} = \frac{1}{OP} + \frac{2}{R};$$

d'où il résulte que OP' peut être considéré comme constant. Ainsi P' est l'image du point P. Ce degré d'approximation correspond à la théorie élémentaire des miroirs concaves.

On obtiendra un plus haut degré d'approximation en prenant un terme de plus dans la valeur de $\cos \alpha$

$$(1 \text{ ter}) \quad \frac{1}{OP'} = \frac{1}{OP} + \frac{2}{R} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right).$$

La nouvelle formule est exacte aux quantités près du quatrième ordre de grandeur. On l'emploie pour le calcul des aberrations, et elle suffit à tous les besoins de la pratique.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE. — Posons $CP = p$, $CP' = p'$, et convenons de compter ces quantités positivement dans le sens CO, négativement en sens contraire; on a $OP = p - R$, $OP' = R - p'$. La substitution de ces valeurs dans la formule (1 bis) donne, en posant $f = \frac{R}{2}$,

$$(2) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f};$$

c'est la formule élémentaire des miroirs.

Pour $p = \infty$, la formule (2) donne $p' = \frac{2}{R} = f$. Le point F, milieu de OC, se nomme le *foyer principal* du miroir. C'est le point de concours des rayons réfléchis correspondant à des rayons incidents parallèles à l'axe principal.

Posons encore $FP = \varpi$, $FP' = \varpi'$ et convenons de compter ces quantités positivement dans le sens FO, négativement en sens contraire. On a $p = \varpi + f$, $p' = \varpi' + f$; la substitution de ces valeurs dans la formule (2) donne

$$(3) \quad \varpi \varpi' = f^2.$$

C'est la formule de Newton (1); elle est équivalente à la formule (2).

(1) NEWTON, *Optique*, livre I^{er}.

La formule de Newton fournit une construction élémentaire très simple de l'image d'un point lumineux situé sur l'axe. Du foyer principal F comme centre (fig. 32), avec un rayon égal à f , on décrit une circonférence. Si le point P est extérieur à ce cercle, on mène par ce point la tangente PT, et l'image de P

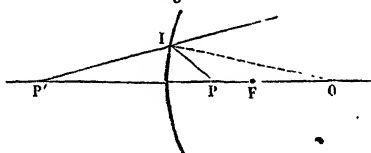
DISCUSSION. — La formule (3), plus élégante que la formule (2), n'est cependant pas généralement adoptée dans l'enseignement, du moins en France. Nous emploierons de préférence la formule (2).

Elle est symétrique par rapport à p et à p' ; on en conclut que P est l'image du point P' au même titre que P' est l'image de P , et l'on nomme les points P et P' deux *foyers conjugués* par rapport au miroir. La propriété des foyers conjugués découle immédiatement de l'égalité des angles d'incidence et de réflexion.

Quand $p > \frac{R}{2}$, p' est positif. Les deux foyers conjugués sont en avant du miroir, c'est-à-dire réels (fig. 32) et situés de part et d'autre du centre de courbure O . Quand $p = R$, ils coïncident au centre du miroir; pour $p = \infty$, $p' = \frac{R}{2}$.

Quand on a $0 < p < \frac{R}{2}$, p' est négatif. Les foyers conjugués sont alors situés de part et d'autre du miroir (fig. 33), c'est-

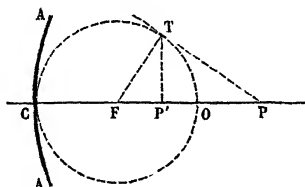
Fig. 33.



à-dire sont l'un réel, l'autre virtuel. Un point lumineux réel P ,

est le point P' , projection de T sur l'axe. Si le point lumineux est intérieur au

Fig. 32.



cercle, on effectue la même construction en sens inverse. Dans ces deux cas on a $PF.P'F = f^2$ (LEBOURG, *Journal de Physique*, 1^{re} série, t. VI, p. 365).

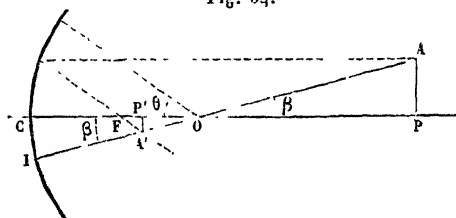
situé entre F et C, donne donc une image virtuelle P'; et réciproquement un point virtuel P' (c'est-à-dire un faisceau de rayons qui convergent vers P') donne une image réelle de P'.

Quand p varie de $\frac{R}{2}$ à zéro, p' varie de $-\infty$ à zéro.

AXES SECONDAIRES. — Toute droite passant par le centre O du miroir et rencontrant sa surface se nomme *axe secondaire du miroir*. Au degré d'approximation où la formule (2) est applicable, les axes secondaires jouissent des mêmes propriétés que l'axe principal.

Soient (fig. 34) un point A situé sur un axe secondaire, P sa projection sur l'axe principal; P' l'image de P, enfin (A') le point où l'axe secondaire rencontre le plan mené par P' perpendicu-

Fig. 34.



lairement à l'axe; je dis que, au degré d'approximation que nous avons adopté, le point (A') coïncide avec l'image A' du point A; on a en effet, en appliquant la formule (1 bis) aux points P et A,

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{1}{OP} = \frac{1}{OP'} + \frac{2}{R}, \\ \frac{1}{OA} = \frac{1}{OA'} + \frac{2}{R}. \end{cases}$$

Mais OA fait avec OP l'angle β plus petit que la demi-ouverture θ du miroir; on a donc

$$OA = \frac{OP}{\cos \beta},$$

$$(OA') = \frac{OP'}{\cos \beta},$$

et, aux quantités près de l'ordre de θ^2 ,

$$OA = OP, \quad (OA') = OP'.$$

En substituant ces valeurs dans la première équation (4) et comparant à la seconde, on trouve

$$OA' = (OA').$$

On nomme *plans focaux conjugués* les plans menés par deux foyers conjugués perpendiculairement à l'axe principal. Toute droite AP, voisine de l'axe et située dans l'un de ces plans, a son image A'P' dans l'autre, et cette image se termine au point de rencontre des axes PC et AI, avec le plan.

Nous nous proposons actuellement de déterminer le rapport des dimensions linéaires O et I d'un objet AB situé entièrement dans un plan focal, et de son image A'B'. Ce rapport sera considéré comme positif quand l'image est droite, négatif quand elle est renversée.

Les triangles AOP, A'OP' donnent

$$\frac{I}{O} = - \frac{A'P'}{AP} = - \frac{OP'}{OP}.$$

D'ailleurs

$$\frac{OP'}{OP} = \frac{R - p'}{p - R} = \frac{p'}{p},$$

d'après la formule des miroirs; on a donc enfin

$$(5) \quad \frac{I}{O} = - \frac{p'}{p}.$$

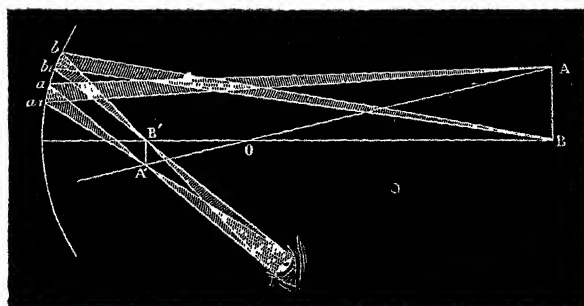
On peut résumer la discussion des formules (3) et (5) dans le Tableau suivant, qui fait connaître la position et la grandeur des images :

OBJET.	$p.$	$p'.$	$\frac{1}{O} = -\frac{p'}{p}.$	IMAGE.	
Réel.	$+\infty$	$+\frac{R}{2}$	-0	Réelle.	Renversée et rapetissée.
	Décroit.	Croît.	Décroit.		Renversée et agrandie.
	$+R$	$+R$	-1	Virtuelle.	Droite et agrandie.
	$+\frac{R}{2}$	$-\infty$	$+\infty$		Droite et rapetissée.
Virtuel.	$-\infty$	$-\frac{R}{2}$	$+0$	Réelle.	Droite et rapetissée.
	$-\frac{R}{2}$	$+\infty$	$+\infty$		Droite et agrandie.

VÉRIFICATIONS EXPÉRIMENTALES. — On peut vérifier expérimentalement ces résultats : 1° Pour le cas d'un objet réel, on placera une bougie devant un miroir concave, et l'on observera à l'œil son image virtuelle ou réelle.

Pour voir l'image réelle $A'B'$ directement, il faut placer l'œil en un point où il puisse recevoir à la fois des rayons venus de A' et des rayons venus de B' , comme le montre la *fig.* 35;

Fig. 35.



on peut encore rendre cette image visible dans toutes les directions en plaçant dans le plan focal où elle se forme un écran dépoli qui diffuse la lumière dans tous les sens.

2° Pour le cas d'un point lumineux virtuel, on placera entre la bougie AB et le miroir une lentille convergente, choisie

de manière que l'image réelle qu'elle fournit soit située derrière le miroir, et que l'image réelle donnée par le miroir se forme entre la lentille et le miroir ; on recevra cette dernière image sur un écran dépoli et l'on constatera qu'elle est renversée par rapport à la bougie, c'est-à-dire droite par rapport à l'objet virtuel.

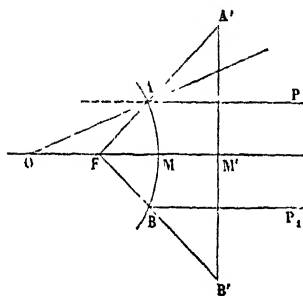
MIROIRS CONVEXES. — Géométriquement, un miroir convexe ne diffère d'un miroir concave que par le signe de la courbure. Les formules trouvées jusqu'ici s'appliquent donc aux miroirs sphériques convexes, en y changeant R en $-R$. On discutera les divers cas qui peuvent se présenter, et l'on vérifiera par l'expérience les résultats de cette discussion.

OBJET.	p .	p' .	$\frac{1}{O} = -\frac{p'}{p}$.	IMAGE.	
Réel.	$+\infty$	$-\frac{R}{2}$	$+0$	Virtuelle.	Droite et rapetissée.
	Décroit.	Croît.	Croît.		
	-0	$+\infty$	-1	Réelle.	Droite et agrandie.
Virtuel.	$-\frac{R}{2}$	$+\infty$	$+\infty$	Virtuelle	Renversée et agrandie.
	$-R$	$-R$	-1		Renversée et rapetissée.
	$-\infty$	$-\frac{R}{2}$	-0		

MESURE DES RAYONS DES MIROIRS. — Au moyen des formules qu'on vient de démontrer, on effectuera tous les calculs relatifs aux miroirs sphériques, pourvu que l'on connaisse leur rayon de courbure. On déterminera ce rayon par l'effet optique même. Pour un miroir concave, il suffira de l'exposer à la lumière solaire, de mesurer la distance FM de son foyer au sommet, et cette distance sera $\frac{R}{2}$. On pourra aussi chercher le point où doit être placé l'objet pour se confondre avec son image : c'est le centre de courbure du miroir. On pourra enfin mesurer les distances au miroir de deux points conjugués réels quelconques.

Quand il s'agit d'un miroir convexe, on couvre toute sa surface, à l'exception de deux points A et B (*fig. 36*), et on l'expose aux rayons solaires PA, P₁B; les rayons réfléchis AA', BB' partent virtuellement de F, qui est à une distance de M égale à $\frac{R}{2}$, on les reçoit sur un écran que l'on éloigne ou que l'on rapproche jusqu'à ce que leur écart A'B' soit double de AB; alors $MM' = MF = \frac{R}{2}$.

Fig. 36.



On peut aussi se servir de la propriété des foyers conjugués, en prenant pour point lumineux un point virtuel situé entre le miroir et son foyer, et mesurant la distance au miroir de ce point et de son image réelle, laquelle est située en avant du miroir. On se procure l'objet virtuel en employant un miroir concave ou une lentille convenablement choisie; on place le miroir convexe en avant du point où se formera l'image réelle, donnée par le miroir concave ou la lentille.

On peut enfin mesurer directement le rayon de petits miroirs sphériques concaves ou convexes à l'aide du sphéromètre (*voir t. I^{er}*).

ABERRATION. — Nous avons vu que les rayons réfléchis issus d'un point P de l'axe ne passent pas rigoureusement en un même point, mais que l'on a, entre les distances OP et OP' (*fig. 31*), la relation exacte

$$\frac{1}{OP'} = \frac{1}{OP} + \frac{2 \cos \alpha}{R},$$

α désignant l'angle que la normale au point d'incidence I fait avec l'axe.

En désignant par θ la demi-ouverture du miroir, les rayons

réfléchis marginaux ($\alpha = \theta$) couperont l'axe au point P'_1 (fig. 37), tel que

$$\frac{1}{OP'_1} = \frac{1}{OP} + \frac{2 \cos \theta}{R},$$

les rayons centraux ($\alpha = 0$) coupent l'axe au point P''_1 , tel que

$$\frac{1}{OP''_1} = \frac{1}{OP} + \frac{2}{R}.$$

La longueur $P'_1 P''_1$ se nomme l'*aberration longitudinale* du miroir relativement au point P.

On trouve aisément

$$\begin{aligned} P''_1 P'_1 &= \frac{2(p-R)^2 R (1 - \cos \theta)}{(2p-R)[R + 2(p-R) \cos \theta]} \\ &= 2 \frac{(p-R)^2}{2p-R} \frac{1 - \cos \theta}{1 + \frac{2(p-R)}{R} \cos \theta}. \end{aligned}$$

Au second degré d'approximation, on peut poser $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ et la valeur de $P''_1 P'_1$, exacte aux quantités près de l'ordre de grandeur de θ^4 , est

$$P''_1 P'_1 = \frac{(p-R)^2 R \theta^2}{(2p-R)^2}.$$

Tant que p n'est pas trop voisin de $\frac{R}{2}$, cette quantité est de l'ordre de grandeur de θ^2 . Pour $p = \frac{R}{2}$, elle devient infinie quel que soit θ ; il est à remarquer en effet que, dans ce cas, les rayons centraux sont réfléchis parallèlement à l'axe, tandis que les rayons marginaux donnent, par leur réflexion, des rayons divergents : il n'y a plus d'image. La théorie élémentaire indiquerait une image à l'infini.

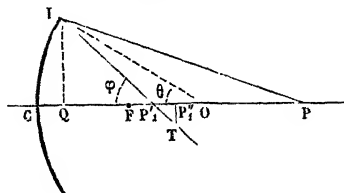
Pour $p = R$, l'aberration longitudinale est nulle; enfin pour $p = \infty$, elle devient

$$\lambda = \frac{R \theta^2}{4};$$

λ est ce qu'on appelle l'*aberration longitudinale principale*.

Par le foyer P'_1 des rayons centraux issus du point P menons un plan perpendiculaire à l'axe; les rayons réfléchis marginaux découperont dans ce plan un cercle dont le rayon P'_1 est désigné sous le nom de *rayon du cercle d'aberration* ou *aberration latérale* (fig. 37).

Fig. 37.



On trouve aisément

$$\begin{aligned} P'_1 T &= P'_1 P'_1 \tan \varphi = P'_1 P'_1 \frac{R \sin \theta}{P'_1 Q} \\ &= \frac{2(p-R)^2}{2p-R} \frac{R \sin \theta (1 - \cos \theta)}{2(p-R) \cos^2 \theta + R \cos \theta + R - p}. \end{aligned}$$

Si l'on remplace $\cos \theta$ et $\sin \theta$ par leur développement en série, on obtient, aux quantités près du cinquième ordre de grandeur,

$$P'_1 T = \frac{(p-R)^2 R}{(2p-R)p} \theta^3 = \theta P'_1 P'_1 \frac{2p-R}{p}.$$

Le rayon du cercle d'aberration est donc une quantité du troisième ordre de grandeur. Cependant elle devient, comme l'aberration longitudinale, infinie pour $p = \frac{R}{2}$ et nulle pour $p = R$.

Pour $p = \infty$, l'aberration latérale *principale* est ⁽¹⁾

$$\gamma = \frac{R \theta^3}{2}.$$

(1) Pour un miroir de 3° d'ouverture, on a

$$\lambda = 0,000686 R,$$

$$\gamma = 0,0000717 R,$$

et pour 30° d'ouverture

$$\lambda = 0,0686 R,$$

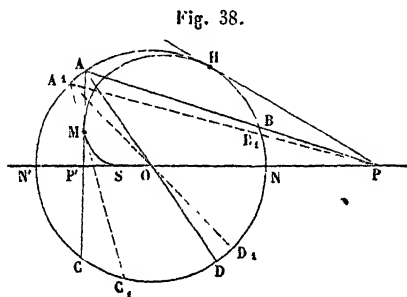
$$\gamma = 0,0717 R.$$

Pour qu'un miroir sphérique soit d'un bon usage, il est nécessaire que les aberrations soient très petites, d'où résulte la nécessité de leur donner une faible ouverture.

Les miroirs que l'on construit pour les télescopes ont une ouverture de 2° ou 3° au plus, et leurs aberrations sont très faibles, malgré leur grand rayon. Ceux que l'on emploie communément dans les laboratoires ont une ouverture de 10° à 12° ; malgré leur faible rayon, leur aberration est encore assez considérable.

CAUSTIQUE (1). — On peut envisager le problème de la réflexion sur une sphère à un point de vue purement géométrique, et chercher le lieu des intersections successives des rayons réfléchis issus d'un point unique. Ce lieu se nomme *surface caustique*. Comme elle est de révolution autour de la droite qui joint le point lumineux au centre de la sphère, il suffit de trouver la méridienne de cette surface.

Soient P le point lumineux (fig. 38), PA un rayon incident,



AC le rayon réfléchi; nous voulons déterminer le point M de

(1) La considération des caustiques est due à Tschirnhausen (*Acta eruditorum*, p. 364; 1862). La théorie de ces surfaces a été perfectionnée par de la Hire (*Mémoires de l'ancienne Académie des Sciences*, t. IX, p. 418); Jean et Jacob Bernoulli (JEAN BERNOULLI, *Opera*, 1-52; JACOB, *Acta eruditorum*, 1693), etc.; et plus récemment par Ch. Dupin (*Ann. de Ch. et de Phys.*, 2^e série, t. V, 85); Quételet (*Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, III, 15; IV, 79); Sturm (*Annales de Gergonne*, t. XV, p. 205; Gergonne (*Annales de Mathématiques de Gergonne*, t. XVI, p. 65, 247, 307), etc.

la caustique, c'est-à-dire le point où AC rencontre un autre rayon réfléchi infiniment voisin A_1C_1 . Soient i et $i + di$ les angles d'incidence, r et $r + dr$ les angles de réflexion; on a

$$\begin{aligned} 2i &= BD, & 2(i + di) &= B_1D_1, & 2di &= BB_1 + DD_1, \\ 2r &= CD, & 2(r + dr) &= C_1D_1, & 2dr &= CC_1 - DD_1; \end{aligned}$$

et, comme $di = dr$,

$$(1) \quad CC_1 - BB_1 = 2DD_1 = 2AA_1.$$

Posons

$$AB = AC = 4a, \quad AP = p, \quad AM = p';$$

nous aurons, dans les triangles semblables PBB_1 , PAA_1 , d'une part, et CMC_1 , AMA_1 de l'autre,

$$\begin{aligned} \frac{BB_1}{AA_1} &= \frac{PB}{PA_1} = \frac{p - 4a}{p} = 1 - \frac{4a}{p}, \\ \frac{CC_1}{AA_1} &= \frac{MC}{MA_1} = \frac{4a - p'}{p'} = \frac{4a}{p'} - 1. \end{aligned}$$

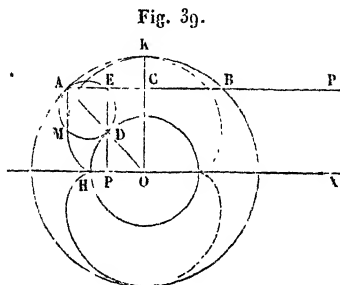
On remplace CC_1 et BB_1 par leurs valeurs dans l'équation (1), et l'on obtient

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{4a}{p'} - 1 - 1 + \frac{4a}{p} = 2, \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{a}. \end{cases}$$

Cette équation fera connaître le point M, et l'on construira la caustique par points. Considérons en particulier le cas où le point P est à l'infini (*fig. 39*). L'équation (2) donne $p' = a$. Soient PA l'un des rayons incidents, AM le rayon réfléchi. Décrivons deux circonférences, l'une du point O comme centre avec un rayon OD moitié de celui de la sphère, l'autre AED tangente en A et en D aux deux cercles extérieur et intérieur. L'angle AED est droit comme contenu dans une demi-circonférence, et AË étant parallèle à l'axe OX, EDP lui est perpendiculaire. Les triangles rectangles AED, DPO sont égaux, comme ayant l'hypoténuse égale; $AE = PO = EC = \frac{AB}{4}$; AE est donc égal à a . Menons le rayon réfléchi AM jusqu'à la ren-

contre de la circonférence AMD, $AM = AE = a$; donc M est un point de la caustique.

D'un autre côté, l'angle MAD est égal à DOP; le premier a pour mesure $\frac{MD}{2}$ et le second DH; MD contient donc deux fois plus de degrés que DH, et, comme le rayon de la circonférence AED est la moitié de OD, il faut que l'arc MD soit égal à HD. Le point M est donc engendré par le roulement de la circonférence AED sur la circonférence centrale HD; la caustique est une épicycloïde; son sommet est en H; elle est tangente au miroir en K. Elle a une autre branche ponctuée qui ne répond pas à la question.

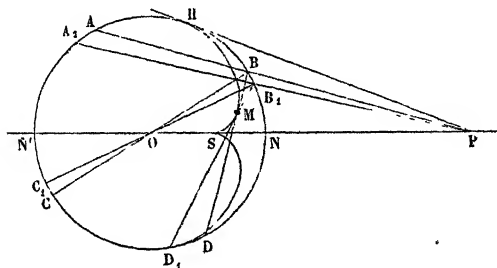


Quelle que soit la distance du point lumineux, la caustique affecte toujours une forme analogue et offre un point de rebroussement sur l'axe.

On peut répéter sur les miroirs convexes l'étude qui vient d'être faite sur les miroirs concaves. En voici le résultat :

1° Les rayons partis de P, après s'être réfléchis à la partie antérieure d'une sphère (fig. 40), sont tangents à une surface

Fig. 40.

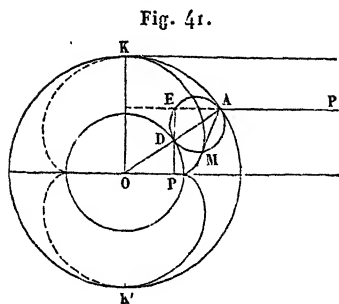


caustique HMS qui est de révolution autour de PS; elle est virtuelle : c'est la développée de toutes les surfaces d'onde réfléchies.

2° Si l'on désigne par p la distance PB, par $4a$ la corde AB, par p' la longueur BM, on a la relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = -\frac{1}{a}.$$

3° Dans le cas particulier où le point lumineux est à l'infini, la génératrice de la caustique est une épicycloïde engendrée par le roulement d'un cercle



EAM de rayon $\frac{R}{4}$ sur une circonférence OD de rayon $\frac{R}{2}$ (fig. 41).

Quand on considère un miroir limité, de très faible ouverture, la portion correspondante de la caustique se réduit à une très petite étendue à partir du point de rebroussement. Au degré d'approximation auquel la théorie élémentaire a été établie, ce point est le point de concours de tous les rayons lumineux réfléchis; son abscisse p' est donnée par la relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \pm \frac{2}{R},$$

à laquelle se réduit l'équation (2) pour les rayons infiniment voisins de l'axe. Nous retombons ainsi, par une méthode différente, sur l'équation connue des miroirs.

MIROIRS PARABOLIQUES. — On peut chercher quelle est la forme théorique qu'il convient de donner à un miroir pour que tous les rayons issus d'un point donné P viennent, après réflexion, passer par un second point P'. Si P et P' sont des foyers conjugués réels, la surface cherchée est un ellipsoïde de révolution ayant P et P' pour foyers. Si l'un des foyers, P par exemple, est virtuel, le miroir est une nappe d'hyperboloïde de révolution dont les foyers sont P et P'. Enfin, si l'on suppose que l'un des foyers P soit à l'infini, la surface est un paraboloïde de révolution ayant pour foyer P.

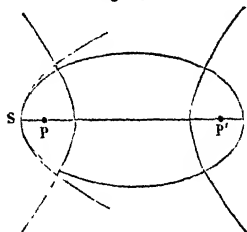
Dans une faible étendue autour de son sommet S (fig. 42), le paraboloïde de révolution peut être confondu avec la sphère osculatrice, dont le rayon est le double de la distance SP, ce qui ramène encore la propriété élémentaire connue des miroirs sphériques.

Au degré d'approximation correspondant au calcul des aberrations, l'assimilation d'un miroir sphérique à un miroir parabolique cesse d'être légitime; et les constructeurs doivent avoir recours, pour obtenir des miroirs aplanétiques ⁽¹⁾, à la méthode des retouches locales indiquée par Foucault ⁽²⁾ et que nous allons esquisser sommairement.

La forme sphérique est relativement facile à obtenir. C'est celle que prennent naturellement deux corps que l'on use l'un sur l'autre en les frottant dans tous les sens avec interposition d'une poudre dure et très ténue : la sphère est en effet la seule surface qui s'applique exactement sur elle-même dans toutes les situations. Le miroir de bronze ou de verre que l'on veut construire est ainsi dégrossi sur une matrice de bronze, à l'aide de tripoli imprégné d'huile que l'on choisit de plus en plus fin.

Comme on ne peut s'en rapporter aux indications du sphéromètre pour vérifier la sphéricité de très grands miroirs, on a recours, pour terminer le polissage, à une méthode optique consistant essentiellement à vérifier que tous les rayons incidents issus du centre du miroir sont réfléchis exactement vers le même point. On établit une source lumineuse de très peu d'étendue dans une position légèrement excentrique; l'œil placé au delà d'un très petit écran qui lui cache la source, et sur le trajet du faisceau réfléchi, doit voir la surface du miroir uniformément obscure. Les points en relief, s'il y en a, se détachent en brillant, les points trop creux en noir foncé. A l'aide

Fig. 42.



(¹) Sans aberration.

(²) FOUCAULT, *Télescopes en verre argenté* (Comptes rendus, t. XLIV, p. 339; t. XLVII, p. 205, 958; t. XLIX p. 85; t. LIV, p. 1, et *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. V, p. 197).

d'une peau de chamois enduite de colcothar, on continue le travail du miroir en pressant légèrement sur les zones en relief jusqu'à ce que toute irrégularité ait disparu.

On creuse ensuite le miroir vers le centre d'une quantité très faible, et l'on renouvelle l'épreuve optique; pour cela on rapproche le point lumineux du miroir, on couvre son image, et l'on continue le travail de manière que l'œil, placé auprès de l'écran, voie la surface réfléchissante uniformément obscure. Alors le miroir possède la forme elliptique, que l'on exagérera de plus en plus en enlevant de la matière au centre et rapprochant le point lumineux du miroir, jusqu'à ce que son image se forme en dehors des limites du laboratoire où l'on effectue le travail. On termine le travail en employant, pour la vérification optique, des procédés fondés sur l'observation de certains phénomènes de diffraction qui ne peuvent trouver place ici. On vérifie enfin que le miroir satisfait pleinement au but auquel il est destiné, en le montant sur un télescope, et substituant un astre à la source lumineuse des expériences précédentes.

MIROIRS CONIQUES. — Quand un miroir présente, en un même point P, des courbures principales différentes, il n'y a pas d'image unique, même quand on limite le miroir à une étendue très faible autour du point P. Menons en ce point deux plans normaux rectangulaires contenant les courbures principales, et considérons un point lumineux N pris sur la normale. On peut, dans un intervalle peu étendu, confondre les traces de ces plans avec les circonférences de courbure principale; l'effet du miroir courbe sera donc celui d'un miroir sphérique de rayon R ou R', suivant que l'on considère des rayons incidents contenus dans l'un ou l'autre des plans principaux. Il y aura donc deux images du point N situées sur la normale à des distances différentes du miroir. Suivant la position de l'œil, l'une ou l'autre de ces images pourra être aperçue d'une manière à peu près distincte.

Pour un miroir cylindrique ou conique, le miroir est plan dans le sens des génératrices, courbe dans le sens perpendiculaire; l'un des rayons de courbure est infini. Nous nous bornerons

à considérer le cas très simple d'un miroir conique, l'œil étant supposé à l'infini dans la direction de l'axe. Les seuls rayons qui puissent parvenir à l'œil sont réfléchis dans des plans normaux contenant les génératrices, et nous n'avons à nous occuper que des images de la première espèce.

Dans la *fig. 49*, le miroir conique est projeté en SCD sur un plan vertical, et en O'C'D' sur le plan horizontal (*fig. 43*). S'il est posé sur un carton peint, l'œil, placé sur l'axe OO' à l'infini, verra par réflexion une image toute déformée de la peinture. Mais on peut dessiner sur le carton une figure déformée de telle sorte qu'étant vue dans le miroir, elle représente un objet régulier et connu.

Soient A', B', \dots des points de l'objet tels qu'on veut les voir; on se propose de chercher où doivent être placés les points correspondants A, B, \dots du dessin

qu'il faut tracer sur le carton. Commençons par A' qui est sur la ligne AO' parallèle à la ligne de terre : il est vu suivant DE , il provient d'un rayon incident aE ; et si l'on projette a en A , A est le point du dessin dont l'image est vue en A' . Pour un point quelconque B' , on commence par le rabattre en b' ; β est la projection verticale de b' ; le rayon incident serait $b_1\beta$; b_1 correspond à b , et, en rabattant b en B sur $O'B'$, on a en B le point qui sera vu en B' . En répétant la même construction pour un grand nombre de points, on dessinera l'*anamorphose* (1) qui, étant vue par réflexion, représentera le tableau régulier.

(¹) C'est Simon Stevin qui s'est occupé le premier du problème des *anamorphoses* (*Magia universalis*, Herbipol., 1657). Leupold (*Anamorphosis mechanica nova*, Lips., 1714) construisit un instrument pour les dessiner.

CHAPITRE IV.

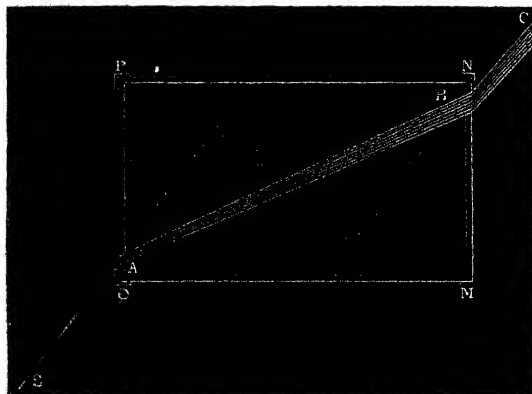
RÉFRACTION. — PRISME.

Réfraction. — Lois géométriques. — Indices des diverses substances. — Indices de retour et relatif. — Discussion de la loi de Descartes. — Angle limite. Construction du rayon réfracté. — Réflexion totale. — Réfraction à travers une surface plane; lignes focales. — Caustique. — Réfraction à travers une surface plane; lignes focales. — Discussion. — Condition d'émergence; méthode de Descartes pour la mesure des indices de réfraction; minimum de déviation. — Vérification avec la lumière monochromatique. — Foyer virtuel du prisme. — Cas de la lumière solaire. — Raies du spectre. — La loi de Descartes s'applique à chaque couleur simple. — Composition de la lumière blanche.

RÉFRACTION.

On peut avoir une idée générale du phénomène de la réfraction en faisant arriver un faisceau solaire dans une chambre

Fig. 44.



obscur et le recevant obliquement à travers une cuve pleine d'eau (fig. 44). Comme il illumine les poussières qui se trouvent

sur son passage, on voit dans l'obscurité le chemin qu'il suit. On constate ainsi qu'il se rapproche de la normale en pénétrant dans l'eau, que la déviation est nulle sous l'incidence normale, qu'elle augmente avec l'inclinaison jusqu'à une valeur limite et que, dans le cas où la deuxième surface est parallèle à la première, le faisceau reprend sa direction primitive en sortant de l'eau pour rentrer dans l'air.

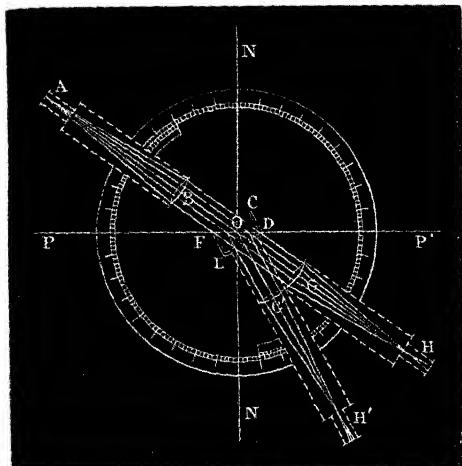
LOIS GÉOMÉTRIQUES. — Les lois de la réfraction sont complexes : elles dépendent à la fois de certaines qualités inhérentes aux lumières qu'on étudie, de la distance du point lumineux, de la nature des milieux en contact, et enfin de l'inclinaison du faisceau incident sur la surface de séparation.

Pour commencer par un cas relativement simple, nous choisirons tout d'abord la lumière émise par la combustion de l'alcool salé, lumière d'un jaune pâle et qui dans l'obscurité illumine en jaune tous les objets, quelle que soit leur couleur propre. Nous prendrons ensuite un point lumineux situé à l'infini; enfin nous choisirons comme premier exemple un milieu déterminé, l'eau. Dans ce cas bien défini, nous n'avons plus qu'à chercher comment varie le phénomène avec les incidences.

Nous emploierons encore le même cercle divisé (*fig. 45*), placé dans un plan vertical et réglé comme précédemment; nous éclairerons les fils croisés qui sont à l'extrémité A du tube AB avec une lampe à alcool salé. Il faudrait que le point A fût reculé jusqu'à l'infini; comme cela n'est pas possible, on a recours à un artifice qui réalise les mêmes conditions et qui consiste à armer l'autre extrémité B du tube d'une lentille convergente dont la distance focale est égale à AB. On prouvera dans la suite, et l'expérience montre aisément que la lumière partie de A et sortant de la lentille B est dans les mêmes conditions physiques que si elle venait d'un point placé à l'infini sur l'axe BA. La lunette, amenée dans la position GH et braquée à l'infini, vise ce point. Soit i l'angle que son axe fait alors vers la verticale NN. Nous disposerons ensuite une cuve en verre CDEF dont le fond ED, normal à l'axe G'H', est porté par la même alidade que la lunette et partage tous

ses mouvements ⁽¹⁾, et nous y mettrons de l'eau jusqu'en O. Sortie de la lentille B, la lumière pénètre dans l'eau en se déviant, et l'expérience prouve qu'on peut toujours, en déplaçant la lunette sur le cercle, lui donner une position G'H' telle, que le faisceau, traversant DE normalement et sans déviation, parcourt la lunette suivant son axe G'H', de façon qu'on voit, sans changer le tirage, l'image du point A en coïncidence avec le réticule. Soit r l'angle que fait alors l'axe de la lunette avec

Fig. 45.



la verticale NN. La réfraction à travers DF se borne donc à changer la direction suivant laquelle on voit un point lumineux situé à l'infini. Cette direction faisait avec la normale NN un angle d'incidence i ; elle fait un angle r après la réfraction, et l'on trouve entre i et r la relation

$$\frac{\sin i}{\sin r} = 1,333.$$

Cette loi a été découverte par Descartes ⁽²⁾ et porte son nom.

⁽¹⁾ Le principe de cette expérience est dû à Newton.

⁽²⁾ DESCARTES, *Dioptriques*, Cap. II, p. 56 et suiv. Amstelodami, 1687; édition élzévirienne. La 1^{re} édition fut publiée à Leyde en 1637.

Ptolémée avait déjà étudié la réfraction au moyen d'un cercle divisé, muni

Comme la loi de la réflexion, elle s'interprète de deux manières :

I. On peut d'abord représenter la lumière incidente par des ondes qui seront planes, puisqu'elles viennent de l'infini. Soit CB l'une d'elles (fig. 46); elle rencontre la surface réfringente suivant une ligne B et fait avec elle un angle DBC égal à i . L'onde réfractée est également plane; sa surface, au même moment, est BE; elle rencontre la surface réfringente suivant la même ligne B et fait avec elle un angle EBD égal à r . Les lois s'expriment ainsi :

« 1° À toute onde plane incidente correspond une onde plane réfractée; 2° toutes deux se rencontrent sur la surface réfringente en une trace commune, normale au plan d'incidence; 3° les sinus des angles i et r que font les ondes incidente et réfractée avec la surface réfringente sont dans un rapport constant. »

L'indice de réfraction n est égal au rapport des vitesses de propagation des ondes incidentes et réfractées. On démontrera cette loi dans la partie de cet Ouvrage consacrée à l'*Optique physique*.

II. Si l'on décompose la lumière incidente en rayons fictifs parallèles entre eux, puisqu'ils viennent de l'infini, et que l'on considère en particulier celui qui parcourt l'axe AB du tube

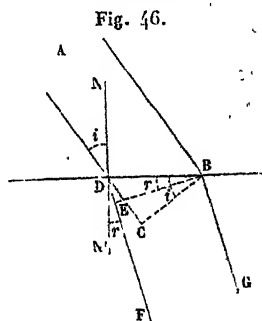


Fig. 46.

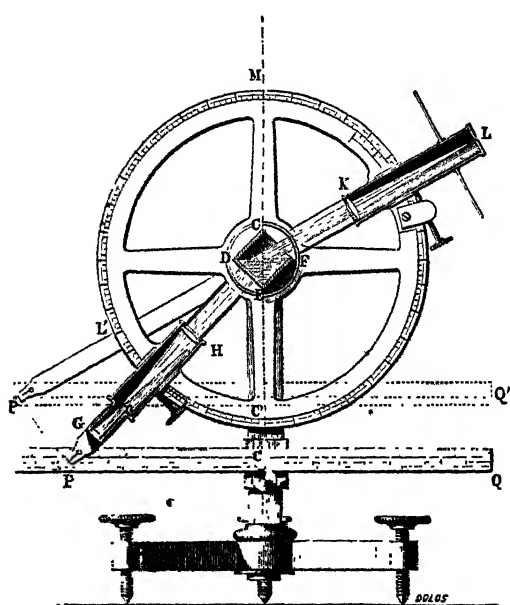
de deux Index mobiles sur la circonférence, qu'il plongeait verticalement dans l'eau jusqu'au centre, et il avait construit une table des angles d'incidence et de réfraction.

Vers le XII^e siècle, Al-Hazen employa une méthode identique à celle de Ptolémée. Ses recherches et celles de Vitellio sont consignées dans le *Thesaurus Optica* de Risner (Basil., 1572). Kepler (*Paralipomena ad Vitellionem, seu Astronomiæ pars optica*, Francf., 1604; et *Dioptrices*, Augst. Vindelic., 1611) étudia la réfraction en comparant la longueur de l'ombre portée par une paroi verticale sur un plan horizontal, soit directement, soit à travers un bloc de verre en forme de parallélépipède et pour diverses inclinaisons du rayon lumineux. Mais il énonce une loi inexacte de la réfraction.

D'après Huygens et Vossius (*Hugenii Dioptrica*, p. 2; Vossius, *De natura lucis*. Amstelodami, 1662) la découverte de la loi de la réfraction serait due à Willebrod Snellius, mort en 1626.

(fig. 45), il forme avec la normale ON un plan et un angle i qu'on nomme *plan et angle d'incidence*. La lumière réfractée, puisqu'elle est dans les mêmes conditions que si elle venait de l'infini, est également composée de rayons parallèles, dont l'un OG'H' suit l'axe de la lunette et continue BO; il fait avec la normale un plan et un angle r (fig. 46) qu'on nomme *plan et angle de réfraction*, et l'on dira : « 1° à tout rayon incident

Fig. 47.



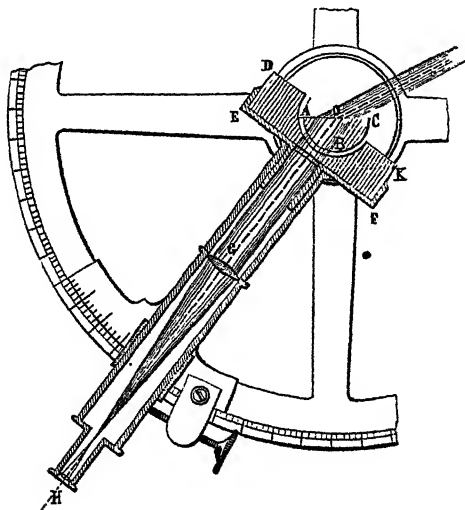
correspond un rayon réfracté ; 2° tous deux sont contenus dans le même plan normal à la surface en O ; 3° le rapport des sinus d'incidence et de réfraction est constant et égal à 1,333, quand la lumière passe de l'air dans l'eau. »

On emploie souvent pour la vérification expérimentale un appareil qui n'est pas sans intérêt (fig. 47). C'est un cercle portant comme précédemment un collimateur LK et une lunette HG fixée à la cuve DEF, mais les alidades sont prolongées par des tiges KL' P' et GP, terminées elles-mêmes par deux

ouvertures étroites P et P', que l'on a percées à la même distance du centre. Une règle PQ, qu'on peut élever ou abaisser, mais qui reste toujours horizontale, est placée successivement derrière P et P'. Les distances PC, P'C' de ces ouvertures à l'origine des divisions mesurent alors les sinus des angles d'incidence et de réflexion, et l'on peut aisément reconnaître que leur rapport reste constant.

INDICES DES DIVERSES SUBSTANCES. — Ce rapport est égal à 1,333 pour l'eau. Si dans nos expériences nous remplaçons ce liquide par de l'huile ou des dissolutions salines, ou des essences, ou par toute autre substance liquide que nous voudrons, la loi demeurera la même, mais le rapport des sinus prendra d'autres valeurs : il sera 1,67 pour le sulfure de carbone, 1,47 pour l'huile d'olive, 1,37 pour l'alcool, etc. En général, nous le représenterons par n et nous le nommerons *indice de réfraction*.

Fig. 48.



Pour faire la même étude avec un solide transparent, nous emploierons un appareil qui est dû à Boscowitch (¹) (fig. 48).

(¹) BOSCOWITCH, *Oeuvres complètes*, t. II.

ABC est un demi-cylindre de verre; DEFK est un parallélépipède de la même substance, creusé d'une gouttière cylindrique au fond de laquelle le demi-cylindre ABC s'enchâsse exactement. On place cet appareil sur un cercle divisé de façon que le demi-cylindre ABC soit fixé horizontalement au centre et que DEFK puisse tourner avec l'alidade de la lunette CH; EF est fixé normalement à l'axe optique de la lunette, et les expériences se font comme précédemment. Elles démontrent les mêmes lois.

Au reste, les vérifications directes de la loi de la réfraction n'ont qu'une importance très médiocre; cette loi est établie bien plus complètement par la vérification de ses conséquences relativement aux prismes, aux lentilles, etc.

Nous nous occuperons ultérieurement des procédés à employer pour mesurer exactement les indices. Voici quelques résultats :

INDICES DE RÉFRACTION.

Chromate de plomb.....	2,50	à 2,97
Diamant.....	2,46	à 2,75
Phosphore.....	2,224	
Soufre natif.....	2,115	
Zircon.....	1,95	
Borate de plomb.....	1,86	
Rubis.....	1,78	
Sulfure de carbone.....	1,67	
Huile de cassia.....	1,63	
Topaze.....	1,61	
Béryl.....	1,60	
Huile d'amandes amères.....	1,60	
Émeraude.....	1,58	
Flint-glass.....	1,57	
Quartz.....	1,54	
Sel gemme.....	1,54	
Colophane.....	1,54	
Baume du Canada.....	1,53	
Huile de noix.....	1,50	
Crown-glass.....	1,50	
Huile d'olive.....	1,47	
Spath fluor.....	1,43	
Acide sulfurique.....	1,42	
Alcool rectifié.....	1,37	
Éther sulfurique.....	1,36	
Albumine.....	1,35	
Eau.....	1,33	

INDICES DE RETOUR ET RELATIF. — Toutes ces valeurs étant supérieures à l'unité, la lumière se rapproche de la normale en passant de l'air dans les diverses substances. Qu'arriverait-il si elle suivait la marche opposée? L'expérience prouve qu'une lame à faces parallèles (fig. 49), placée entre une lunette et un objet très éloigné, ne déplace jamais l'image. Cela montre que les rayons incidents SA et les rayons émergents BC sont parallèles et font le même angle i avec la normale; on a donc, pour le retour du rayon AB dans le milieu ambiant,

$$\frac{\sin ABF}{\sin CBG} = \frac{\sin r}{\sin i} = \frac{1}{n}.$$

En général, lorsque l'indice, au passage de l'air dans un milieu, est n , l'indice pour le retour de ce milieu dans l'air est $\frac{1}{n}$.

Les images ne sont pas déplacées davantage quand on superpose deux lames à faces parallèles dont les indices respectifs sont n et n' ; cela prouve que les rayons incidents et émergents font le même angle i avec la normale (fig. 56). On aura successivement

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n, \quad \frac{\sin r}{\sin r'} = x, \quad \frac{\sin r'}{\sin i} = \frac{1}{n'};$$

en multipliant membre à membre,

$$1 = \frac{nx}{n'}, \quad x = \frac{n'}{n}.$$

Donc l'indice, au passage d'un premier milieu dans un second, est égal au rapport des indices du second et du premier milieu par rapport au vide; on l'appelle l'indice relatif des deux milieux. Les indices absolus se rapportent au passage du vide dans un milieu réfringent.

DISCUSSION DE LA LOI DE DESCARTES. — ANGLE LIMITE. — Quand,

Fig. 49.

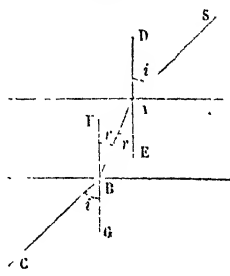
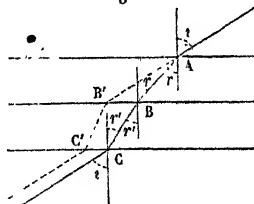


Fig. 50.

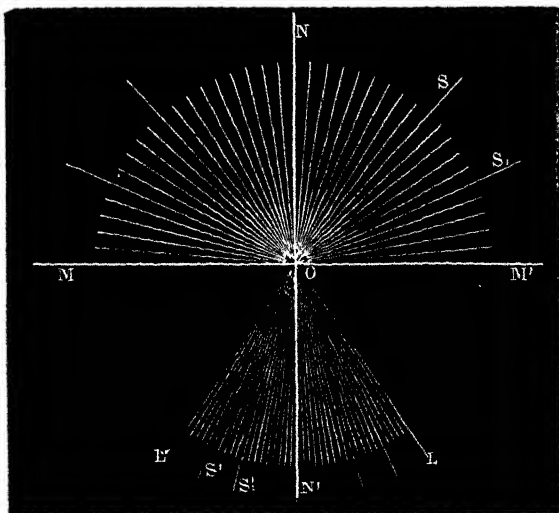


dans la formule $\sin i = n \sin r$, on suppose $n > 1$, l'angle r est plus petit que i ; il est nul pour $i = 0$, croît avec i et pour l'incidence rasante il atteint un maximum l que l'on nomme *angle limite*, et qui est donné par la formule

$$\sin l = \frac{1}{n};$$

donc un rayon continue son chemin en ligne droite s'il est normal (fig. 51); il se rapproche de ON' dans tous les autres

Fig. 51.

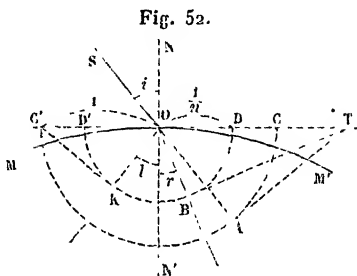


cas, et il atteint une limite OL pour $i = 90^\circ$. Si l'on décrit un cône avec ON' pour axe et OL pour génératrice, tous les rayons réfractés qui pénétreront par le point O sont compris dans son intérieur.

On arrive à un résultat analogue pour le passage de la lumière d'un milieu quelconque dans un autre : n est alors l'indice relatif, et, suivant qu'il est plus grand ou plus petit que 1, le rayon réfracté se rapproche ou s'écarte de la normale, en demeurant toujours compris dans les cônes $L'OL'$ ou MOM' .

CONSTRUCTION DU RAYON RÉFRACTÉ. — Quand on connaît la direction d'un rayon incident et l'indice relatif n du milieu où il pénètre par rapport au milieu d'où il émane, on détermine la direction du rayon réfracté à l'aide de la construction suivante (fig. 52).

Du point d'incidence O ⁽¹⁾ comme centre, et dans le plan d'incidence, on décrit deux demi-circonférences A et B ayant respectivement



pour rayons r et $\frac{r}{n}$, et l'on mène la tangente OT à la surface de séparation MM' des deux milieux. On prolonge le rayon incident SO jusqu'à sa rencontre avec la circonférence A ; on mène la tangente AT , et, par le point T , la tangente BT , à la deuxième circonférence; enfin on joint OB . C'est le rayon réfracté.

En effet, les triangles OAT , OBT donnent respectivement

$$\sin i = \sin AON' = \sin OTA = \frac{r}{OT},$$

$$\sin BON' = \sin OTB = \frac{\frac{r}{n}}{OT},$$

d'où

$$\frac{\sin i}{\sin BON'} = n$$

et par suite, puisque BON' est plus petit que 90 ,

$$BON' = r.$$

Cette construction permet de reproduire géométriquement la discussion de l'article qui précède. On obtient l'angle limite en menant du point C' , où le rayon rasant TO rencontre la demi-

(¹) Cette construction est due à Huygens, *Traité de la lumière*, Chap. III, Leyde, 1690.

circonférence A, une tangente à la demi-circonférence B, et joignant le point de contact K au point O (1).

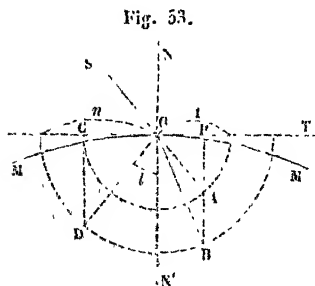
Nous verrons plus tard que la construction du rayon réfracté est susceptible d'être généralisée pour le cas des milieux doués de la double réfraction.

RÉFLEXION TOTALE. — Nous savons trouver le rayon réfracté correspondant à un rayon incident donné. Il est toutefois un cas que nous n'avons pas encore examiné : c'est celui d'un rayon issu du milieu le plus réfringent et rencontrant la surface de séparation des deux milieux sous un angle supérieur à l'angle limite. On a alors $\sin r > \frac{1}{n}$, et, d'après la loi de Descartes, il en résulterait $\sin i > 1$.

La formule répond par une impossibilité; elle ne s'applique plus, et il faut consulter l'expérience. L'expérience prouve qu'il n'y a plus de rayon réfracté, et qu'il se produit un phénomène nouveau et très important.

En même temps qu'un rayon tel que SI (fig. 54) donnait naissance à un rayon réfracté IS', il produisait aussi un rayon intérieur réfléchi, qui, peu intense d'abord, prenait une intensité croissant avec l'obliquité i du rayon incident; quand la

(1) Pour les milieux monoréfringents, on peut avoir recours à une autre construction aussi simple, mais moins générale que la précédente. Du point d'incidence O (fig. 53) comme centre avec des rayons égaux à 1 et à n , on décrit dans



le plan d'incidence deux demi-circonférences situées dans le milieu où pénètre le rayon SO. On prolonge celui-ci jusqu'à son point de rencontre en A avec la demi-circonférence de rayon n . On élève la parallèle AB à la normale ON, et l'on joint le point B, où elle rencontre la demi-circonférence de rayon 1, au point d'incidence. Les triangles BOP, AOP donnent immédiatement

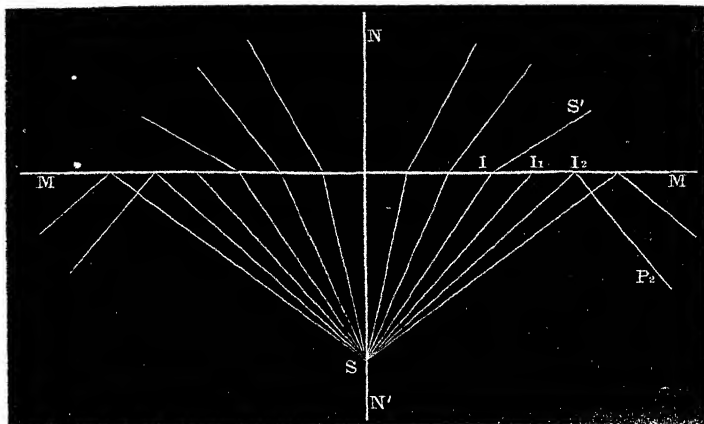
$$\frac{\sin i}{\sin PBO} = \frac{n}{1}$$

et par suite $PBO = BON' = r$.

L'angle limite s'obtient en élevant en C la tangente CD au cercle A, et joignant OD.

lumière SI_2 cesse de se réfracter, le faisceau réfléchi I_2P_2

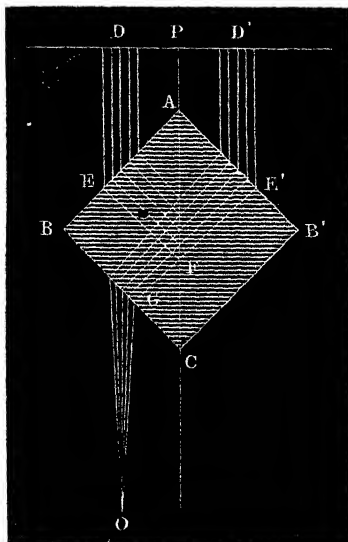
Fig. 54.



acquiert une intensité égale à celle du faisceau incident. On dit alors que la réflexion est *totale* ⁽¹⁾.

Fig. 55.

Soit (fig. 55) un prisme de verre ABC, rectangulaire en B : on fait tomber parallèlement à sa base AC la lumière émise par une feuille de papier blanc DD'. Chaque rayon tel que DE se réfracte en E, se réfléchit en F, pour se réfracter de nouveau en G, et rentrer dans l'air parallèlement à sa direction primitive. En plaçant l'œil dans ce faisceau émergent, on voit une image renversée de la surface DP, après une réflexion en F qui n'a pas dû affaiblir l'éclat si elle est totale, mais



(1) Nous verrons, dans la troisième Partie de l'Optique, quelles sont les lois de la variation d'intensité des deux rayons réfléchi et réfracté.

aussi après que les rayons ont subi deux réfractions en E et en G et traversé une épaisseur de verre $EF + FG$ qui est égale à $E'G$, ce qui a dû diminuer leur intensité.

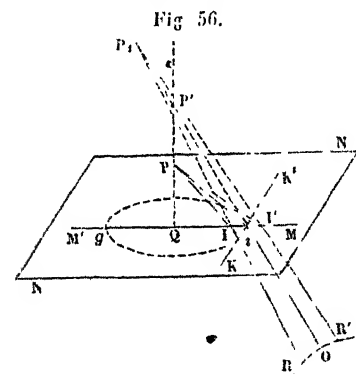
Juxtaposons à ce prisme ABC un second prisme $AB'C$ du même verre, égal au premier, de façon à former un parallélépipède $ABCB'$. Un rayon $D'E'$ se réfractera en E' , traversera $E'G$ et se réfractera de nouveau en G; il aura subi les mêmes actions que le rayon $DEFG$, moins la réflexion en F; et, si celle-ci est totale, l'éclat des deux faisceaux qui sont juxtaposés doit être le même : c'est ce que l'expérience vérifie.

RÉFRACTION A TRAVERS UNE SURFACE PLANE. — LIGNES FOCALES.

— Considérons un point lumineux P situé dans un premier milieu (*fig. 56*), et proposons-nous de déterminer l'effet produit sur l'œil placé en O,

dans un second milieu séparé du premier par une surface plane N.

Menons par P et par le centre de la pupille un plan PMM' perpendiculaire à N, deux rayons incidents voisins PI, PI' , compris dans ce plan (*fig. 56*) et les rayons réfractés $IR, I'R'$ qui se coupent en P_1 . A cause de la faible ouverture de la

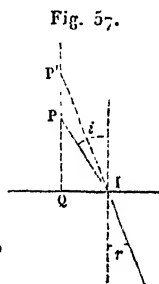


pupille, on peut admettre que P_1 est fixe, quels que soient I et I' ; P_1 est donc le foyer conjugué de P pour tous les rayons compris dans le plan normal PM et qui atteignent l'œil placé en O.

Considérons maintenant un plan PKK' dont la trace sur le plan N est perpendiculaire au milieu i de II' . Les rayons incidents partis du point P et rencontrant KK' au voisinage du point i fournissent des rayons réfractés reçus par l'œil; et, comme l'élément utile de la droite KK' se confond avec un élément de la circonférence ig décrite du point Q comme centre avec Qi pour rayon, on voit que tous ces rayons incidents tombent sur le plan N en faisant le même angle d'inci-

dence; tous les rayons réfractés se rencontrent donc en un point P' de l'axe PQ , P' est le foyer conjugué de P pour les rayons situés dans le plan PKK' .

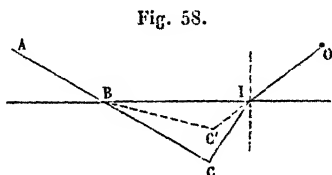
En étendant le même mode de raisonnement à des plans d'incidence très voisins de PMM' et de PKK' , on décompose la portion utile du plan N (laquelle est plus petite que la pupille) en rectangles infiniment petits, et l'on obtiendra deux systèmes de foyers, les uns formant une petite droite perpendiculaire au plan PMM' ayant son milieu en P_1 , tandis que les autres occupent une petite portion de l'axe PQ ayant son milieu en P' . Les deux droites P_1 , P' se nomment *lignes focales* ⁽¹⁾. Leurs milieux sont sur une même droite avec le centre de la pupille; mais, leurs distances à l'œil étant inégales, les deux branches de la petite croix lumineuse qu'elles forment ne seront jamais vues avec une égale netteté.



Le cas particulier où l'œil est sur l'axe PQ mérite une mention spéciale. Alors les deux lignes focales se confondent, et l'image du point P est un point P' (fig. 57) tel que .

$$\frac{P'Q}{PQ} = \left(\frac{\tan i}{\tan r} \right)_{i=0} = \left(\frac{\sin i}{\sin r} \right)_{i=0} = n.$$

Quand le milieu où l'œil se trouve placé est le plus réfringent, l'image P' est plus éloignée que l'objet : c'est l'inverse dans le cas contraire. A ce dernier cas se rapportent les illusions que l'on éprouve en regardant un objet placé dans l'eau; on suppose toujours l'objet moins profondément placé qu'il ne l'est réellement.



La vision d'une droite ABC (fig. 58), en partie plongée dans

(¹) La considération des lignes focales est due à Sturm [*Recherches sur les caustiques par réflexion et par réfraction, dans le cercle* (Ann. de Math. de Gergonne, t. XV, p. 205)].

l'eau, fournit l'apparence d'une ligne ABC' brisée en B. On pourrait déterminer par points l'image BC' , pour chaque position de l'œil.

CAUSTIQUE ⁽¹⁾. — Nous allons actuellement traiter le cas général de la réfraction des rayons issus d'un point P à travers une surface plane indéfinie.

Commençons par démontrer quelques propriétés communes à l'hyperbole et à l'ellipse. L'équation de ces courbes est

$$a^2 y'^2 \pm b^2 x'^2 = \pm a^2 b^2.$$

La normale en M' (*Pl. II, fig. 7 et 8*) aura pour équation

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} (x - x');$$

elle rencontrera l'axe des y' en un point N dont les coordonnées seront

$$x = 0, \quad y = y' = \frac{a^2 y'}{b^2} = \frac{c^2 y'}{b^2}.$$

Joignons N et F, menons l'horizontale $M'Q$; le point P où ces lignes se rencontrent sera déterminé par la relation

$$\frac{PQ}{NQ} = \frac{FO}{ON}, \quad PQ = \frac{(y - y')c}{y'} = \frac{a^2}{c};$$

donc :

1° Le point P est sur la directrice BP de la courbe.

Les distances NM' et NF sont

$$\begin{aligned} NM' &= \sqrt{(y' - y')^2 + x'^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^4 y'^2}{b^4} + \frac{a^2}{b^2} (b^2 \mp y'^2)} = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{c^2}{b^2} y'^2 + b^2}, \\ NF &= \sqrt{c^2 - y'^2} = \frac{c}{b} \sqrt{\frac{c^2}{b^2} y'^2 + b^2}. \end{aligned}$$

2° Le rapport de ces quantités est

$$(1) \quad \frac{NF}{NM'} = \frac{c}{a}.$$

(1) Voir la note de la p. 49*.

Appelons i et r les angles que FN et M'N font avec l'axe des x :

$$\sin i = \frac{y}{NF} = \mp \frac{c^2 y'}{b^2 NF},$$

$$\sin r = \frac{y - y'}{NM'} = \mp \frac{a^2 y'}{b^2 NM'},$$

et, en divisant, on tire cette troisième relation

$$(2) \quad \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c^2}{a^2} \frac{NM'}{NF} = \frac{c}{a}.$$

Cela posé, étudions la réfraction au passage de l'air dans un milieu plus réfringent dont l'indice est n , et qui est terminé par une surface plane Oy (*Pl. II, fig. 7*). Soit F le point lumineux à une distance OF égale à c ; menons un rayon incident quelconque FN faisant avec la normale un angle égal à i . Pour construire le rayon réfracté, nous décrirons d'abord une hyperbole ayant son centre en O, son foyer en F et telle que $\frac{c}{a} = n$; ses axes seront par conséquent

$$a = \frac{c}{n}, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{c}{n} \sqrt{n^2 - 1}.$$

Ensuite nous abaisserons du point d'incidence N une normale NM' à cette hyperbole, faisant avec l'axe des x un angle égal à r , et, d'après ce qui vient d'être démontré, nous aurons

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c}{a} = n;$$

la normale sera dans la direction du rayon réfracté.

En vertu de l'équation (1), on a, en second lieu,

$$NF = n NM',$$

ou bien, en désignant par V et V' les vitesses que doit posséder la lumière dans l'air et dans le milieu, d'après la théorie des ondes,

$$\frac{NF}{NM'} = n = \frac{V}{V'};$$

par suite,

$$NF = Vt, \quad NM' = V't,$$

ce qui veut dire que la lumière mettrait le même temps à venir du point F dans l'air que du point M' dans le milieu, perpendiculairement à l'hyperbole. Cette courbe est donc, virtuellement, la surface d'onde originelle des rayons réfractés. Le foyer de l'hyperbole étant toujours au point lumineux et son centre en O, cette courbe change avec la distance FO; mais le rapport des axes $\frac{b}{a}$ demeurant constant et égal à $\sqrt{n^2 - 1}$, toutes les hyperboles qu'il faudra construire auront les mêmes asymptotes.

L'équation de la développée de l'hyperbole est

$$\sqrt[3]{b^2 y^2} - \sqrt[3]{a^2 x^2} = \sqrt[3]{c^3}.$$

On pourra construire cette courbe CC'C'': tous les rayons réfractés lui seront tangents, et, si l'on fait rouler l'un deux, NM' par exemple, sur son contour, chacun des points de cette ligne, M' ou D, décrira des hyperboles parallèles qui seront autant d'ondes successives.

On a démontré précédemment qu'en menant la ligne M'Q parallèle à l'axe des x , elle rencontre NF en un point P situé sur la directrice; on a donc

$$\frac{FM'}{M'P} = \frac{c}{a},$$

et, comme on a démontré, d'autre part, que

$$\frac{FN}{NM'} = \frac{c}{a},$$

les triangles FM'N, PM'N sont semblables, et l'angle FM'A est égal à FPM' ou à z . En menant le deuxième rayon vecteur F'M', il fera avec la normale un angle AM'R égal aussi à z .

D'après cela, supposons que le milieu réfringent soit prolongé jusqu'à la surface concave de l'hyperbole et terminé par elle, et qu'une onde plane, confondue avec la directrice PB, se présente pour sortir. Chaque rayon PM' fera un angle d'in-

cidence $PM'N$ égal à r , et donnera un rayon réfracté $M'R$ qui, prolongé, passera par F' .

On peut conclure de là que l'onde réfractée sera une sphère dont le centre sera en F' . Pour chercher son rayon, rappelons-nous que

$$\frac{PM'}{FM'} = \frac{a}{c} = \frac{V'}{V};$$

donc le rayon mettra le même temps pour venir de P à M' dans le milieu que de F à M' dans l'air, et, si nous prenons $M'K$ égal à $M'F$, K sera un point de l'onde réfractée. Or, $F'K$, étant la différence des rayons vecteurs, est égal à $2a$: c'est le rayon cherché. On voit, en résumé, que toute onde plane, réfractée par une surface hyperbolique telle que $\frac{b}{a}$ soit égal à $\sqrt{n^2 - 1}$, peut être considérée comme venant d'une origine unique F' qui est le foyer intérieur de l'hyperbole.

Les propriétés de l'hyperbole qui nous ont conduit à toutes ces conséquences optiques appartiennent également à l'ellipse, ce qui va nous autoriser, sans aucune nouvelle démonstration, à énoncer les propositions suivantes (*Pl. II, fig. 8*).

1° Si un point lumineux F est placé dans un milieu d'indice n à une distance c d'un plan qui sépare ce milieu de l'air, l'onde réfractée originelle est une ellipse qui a son foyer en F , et dont les axes sont

$$a = cn, \quad b = c\sqrt{n^2 - 1}.$$

2° L'équation de la développée est

$$\sqrt[3]{b^2 y^2} + \sqrt[3]{a^2 x^2} = \sqrt[3]{c^4};$$

elle rencontre l'axe des y à une distance du centre $OD = \frac{c^2}{b}$.

Supposons qu'un rayon lumineux arrive de F en D , il fait avec l'axe des x un angle I

$$\sin I = \frac{\frac{c^2}{b}}{\sqrt{c^2 + \frac{c^4}{b^2}}} = \frac{c}{a} = \frac{1}{n};$$

l'angle I est l'angle limite.

3° Les rayons réfractés sont tangents à cette développée, et, pour construire une onde quelconque, il faut les faire rouler sur son contour; ainsi le point M' décrit l'ellipse $CC'G$.

Si l'on prend le point C , il décrit une seconde ellipse $CC'C'$. La tangente à la développée EM' est normale en E et en M' aux deux ellipses considérées; la distance EM' est constante et égale à CC' ou à $2b$; la portion concave CGC' de la première ellipse est l'onde originelle; la portion convexe $CC''C'$ de la deuxième est la surface de l'onde quand la lumière aura parcouru l'espace $2b$. Son grand axe est $OC = b$, et son petit, ou OC'' , est $2b - a$.

Quand on prendra un point A situé entre E et M' , la surface d'onde aura quatre points de rebroussement intérieurs; elle se composera de quatre portions d'ellipses tangentes entre elles et normales à la développée au point où elles la rencontrent.

4° Si une onde plane PB menée par la directrice et se propageant dans l'air rencontre un milieu d'indice n ayant la forme d'un ellipsoïde CGC' , dont les axes sont cn et $c\sqrt{n^2 - 1}$, l'onde réfractée est une sphère KK' de rayon $2a$, dont le centre est en F' ; F' est un foyer réel.

LAMES A FACES PARALLÈLES (*Pl. II, fig. 9*). — Considérons en dernier lieu le cas où la lumière partie de F traverse une lame $PIHG$ à faces parallèles, d'indice n et d'épaisseur e , placée à une distance $GF = d$. Un rayon FN pénétrant dans la lame prend la direction NP ; il est dans les mêmes conditions que s'il partait normalement de l'onde hyperbolique MD . Ce rayon, continuant sa route dans la lame, sort en P , reprend sa direction primitive PE , et, pour avoir le point de l'onde E , il faudra prendre $PE = nPM$.

Or, si l'on prolonge MF jusqu'à la rencontre de PE , les triangles semblables PEM et NFM donnent

$$\frac{PE}{PM} = \frac{NF}{NM} = n;$$

donc le point E de l'onde réfractée est à la rencontre de PE et de MF .

Menons la ligne FA parallèle à PN : elle lui sera égale en longueur; sa projection FB sur l'axe des x sera égale à l'épaisseur e de la lame. Le triangle EAF étant semblable à FNM, on a

$$EA = nAF;$$

FA et EA font avec la normale yy' des angles égaux à AFB et ACB, tels que

$$\sin \angle CB = n \sin \angle FB.$$

Le lieu des points cherchés E sera donc le même que celui qu'on trouverait si le point F, étant dans le milieu, envoyait sur un plan yy' des rayons FA qui se réfracteraient dans l'air suivant AP. Or, dans ce cas, les points E sont sur une ellipse qui a son foyer en F, son centre en B, à une distance $FB = c = e$, telle que le rapport $\frac{c}{a}$ soit égal à $\frac{1}{n}$; elle a par conséquent pour axes

$$u = en, \quad b = e\sqrt{n^2 - 1};$$

son centre est en B à une distance de G égale à $d - e$ et son équation sera

$$\frac{y^2}{e^2(n^2 - 1)} + \frac{(x - d + e)^2}{e^2 n^2} = 1.$$

On trouvera aisément de nombreuses applications de ces formules.

FORMULES DU PRISME. — On nomme *prisme* toute portion d'un milieu réfringent comprise entre deux faces AB, AC, faisant entre elles un angle A.

Calculons d'abord la marche que suivraient les rayons parallèles à SE (fig. 59), venant d'une lampe à alcool salé, tombant sur un prisme dans la section normale ABC. Il est clair que les rayons réfractés resteront contenus dans ce plan ABC. Soient i et i' les angles extérieurs en E et F comptés à partir des normales, positivement vers la base du prisme, négativement vers le sommet; r et r' les angles intérieurs, comptés positivement vers le sommet, négativement vers la base, de

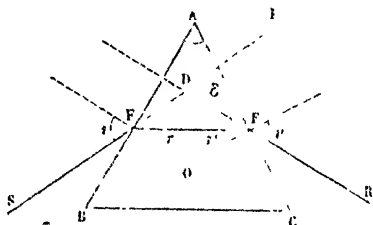
telle sorte que, dans le cas de la *fig.* 59, les quatre angles i , i' , r et r' sont positifs. On a

$$(1) \quad \sin i = n \sin r,$$

$$(2) \quad \sin i' = n \sin r'.$$

Les normales en E et en F se rencontrent au point O. Dans le quadrilatère AEOF, l'angle O est supplémentaire de A; dans le

Fig. 59.



triangle EOF, le même angle O est encore supplémentaire de $r + r'$; donc

$$(3) \quad r + r' = A.$$

Les rayons incident et émergent prolongés forment, à leur point de rencontre D, un angle δ qu'on nomme *angle de déviation*; nous le comptons positivement à partir du rayon incident prolongé et vers la base du prisme; négativement en sens contraire. Le triangle DEF donne

$$(4) \quad \begin{aligned} \delta &= DEF + DFE = i - r + i' - r', \\ \delta &= i + i' - A. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi quatre relations entre les sept quantités i , i' , r , r' , n , A et δ , et ces relations sont générales, grâce aux conventions que nous avons faites sur les signes; il suffira de connaître trois de ces quantités pour calculer les autres.

DISCUSSION. — CONDITIONS D'ÉMERGENCE. — 1° Si le rayon incident est d'abord confondu avec BA, r est l'angle limite; r' , qui est égal à $A - r$, prend la plus petite valeur possible, qui peut être négative, nulle ou positive, suivant la grandeur de A.

Supposons que cet angle A , d'abord très petit, augmente progressivement (*fig. 60*), et que la face d'émergence devienne AC , AC' , AC'' . Le rayon DE fait en E , E' , E'' un angle d'incidence intérieur r' qui est négatif, ou nul, ou positif; il croît avec A et finit par devenir égal ou supérieur à l'angle limite quand la surface de sortie atteint ou dépasse AC'' . Dans ces divers cas, l'angle z' augmente avec r' ; il est négatif en E , nul en E' , positif en E'' . Le rayon émergent prend les directions ER , $E'R'$, $E''R''$; il s'abaisse de plus en plus vers la base du prisme et finit par se réfléchir totalement en E'' .

Fig. 60.

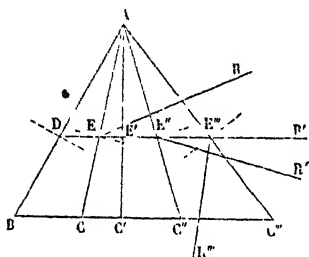
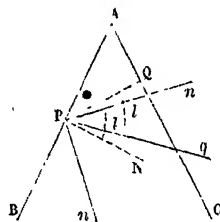


Fig. 61.



2° Faisons diminuer l'angle d'incidence i de $+90^\circ$ à -90° , alors r' et par suite z' augmentera. Le rayon émergent, quelque petit que soit l'angle A , tendra à s'incliner de plus en plus vers la base du prisme et se réfléchira totalement pour une valeur déterminée et suffisamment petite de i .

Pour déterminer quels sont les rayons incidents susceptibles d'émerger du prisme, on peut avoir recours à la construction géométrique suivante. D'un point P pris arbitrairement sur la face d'entrée, comme sommet, on décrit (*fig. 61*) deux cônes ayant respectivement pour axes les normales PN et PQ à la face d'entrée et à la face d'émergence, et dont l'angle générateur est égal à l'angle limite l . Le cône PN contient tous les rayons qui peuvent pénétrer par le point P , et la portion QPN commune aux deux cônes tous ceux d'entre eux qui, faisant avec la normale PQ un angle moindre que l , peuvent sortir du prisme.

3^o *Méthode de Descartes*. — Si le rayon incident devient normal à AB, les formules précédentes se simplifient

$$(1 \text{ bis}) \quad i = 0, \quad r = 0,$$

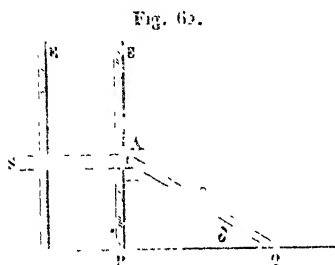
$$(2 \text{ bis}) \quad \sin(\Lambda + \delta) = n \sin \Lambda,$$

$$(3 \text{ bis}) \quad r' = \Lambda,$$

$$(4 \text{ bis}) \quad \delta = i' - \Lambda.$$

Il suffirait de connaître Λ et δ pour pouvoir calculer n .

Tel est le principe de la méthode, dite de Descartes (1), pour



la mesure des indices de réfraction. Un prisme A très aigu, formé de la substance que l'on considère (fig. 62), est appliqué sur un écran vertical E' percé d'un trou I par lequel on fait pénétrer un faisceau de rayons parallèles. On détermine la distance PQ à laquelle les rayons issus du prisme

viennent rencontrer la base horizontale; soit PI la distance verticale du trou I à cette base. On calcule δ par la formule

$$\text{tang } \delta = \frac{PQ}{PI},$$

et l'on mesure Λ ; on en déduit l'indice

$$n = \frac{\sin(\Lambda + \delta)}{\sin \Lambda}.$$

4^o *Minimum de déviation*. — Supposons que l'angle Λ du prisme soit moindre que BAC'' et égal par exemple à BAC'' (fig. 60). Quand le rayon incident rasera la surface BA et que l'angle i sera égal à 90° , le rayon réfracté sera $E''R''$ et l'angle i' plus petit que i . En faisant tourner le prisme autour du point D de manière à diminuer i , i' augmentera, et il arrivera un moment où i et i' seront égaux. Ensuite i' deviendra plus

(1) DESCARTES, *Dioptriques*, Caput X, p. 140 de l'édition elzévirienne.

grand que i et finira par être égal à 90° . Il y aura donc toujours deux positions du prisme pour lesquelles i et i' auront changé leurs valeurs, quelles que soient ces valeurs.

Or la formule

$$(1) \quad \delta = i + i' - A$$

montre que la déviation reste la même si i se change en i' . Donc elle croîtra ou diminuera depuis l'incidence rasante jusqu'à $i = i'$, et elle reprendra ensuite les mêmes valeurs en diminuant ou en croissant jusqu'à l'émergence rasante. Elle sera maxima ou minima pour la situation particulière du prisme dans laquelle $i = i'$: le calcul (1) et l'expérience prouvent qu'elle est minima. Dans ce cas remarquable, les formules sont

$$(1 \text{ ter}) \text{ et } (2 \text{ ter}) \quad \sin \frac{A + \delta}{2} = n \sin \frac{A}{2},$$

$$(3 \text{ ter}) \quad 2r = A,$$

$$(4 \text{ ter}) \quad \delta = 2i - A.$$

(1) Pour que δ soit minimum, il faut d'abord que l'on ait

$$\frac{d\delta}{di} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(a) \quad di + di' = 0.$$

Or, d'après les équations (1), (2) et (3),

$$(b) \quad \begin{cases} \cos i \, di = n \cos r \, dr, \\ \cos i' \, di' = n \cos r' \, dr', \\ dr + dr' = 0. \end{cases}$$

Éliminant les différentielles entre les équations (a) et (b), on obtient

$$(c) \quad \frac{\cos i}{\cos i'} = \frac{\cos r}{\cos r'},$$

ce qui ne peut avoir lieu que pour $i = i'$.

Il faut aussi que

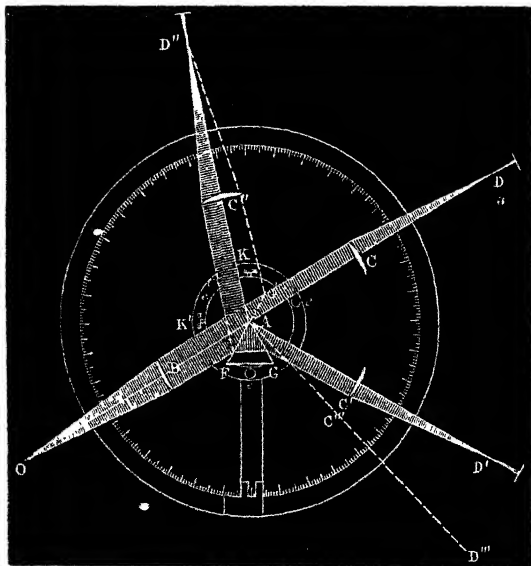
$$\frac{d^2\delta}{di^2} > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2i'}{di^2} > 0.$$

En effectuant le calcul, on trouve que, pour $i = i'$, cette condition se réduit à $n^2 > 1$; elle est donc toujours réalisée dans la pratique.

Il suffira d'avoir fait tourner le prisme jusqu'au moment où la déviation est minima, et de la mesurer à ce moment, pour pouvoir calculer l'indice de réfraction n . C'est le procédé qu'on emploie généralement pour déterminer cette quantité, comme nous le montrerons bientôt.

VÉRIFICATION AVEC LA LUMIÈRE MONOCHROMATIQUE. — Ces formules sont rigoureusement déduites de la loi de réfraction qui

Fig. 63.



a été expérimentalement établie. Cependant il importe de les vérifier, parce que leur confirmation démontrera *a posteriori* la loi des sinus, et nous fournira un moyen précis pour la généraliser et l'étendre à toutes les lumières connues. Nous ferons cette vérification avec le cercle divisé, figuré *Pl. III, fig. 1*, dont on a tracé une coupe théorique (*fig. 63*). Nous éclairerons avec la flamme de l'alcool salé le point de croisement O des fils du collimateur fixé en OB. Il faut commencer par trois opérations préliminaires : orienter le prisme, mesurer son angle A, et déterminer son indice n .

I. Nous fixerons à la cire le prisme AFG sur la plate-forme centrale, et nous le ferons glisser par des vis de rappel K, K', de manière à placer l'arête réfringente A au centre du cercle, c'est-à-dire de manière à voir cette arête en contact avec le fil vertical du réticule de la lunette DC, dans quelque position qu'on la place. Il faut ensuite que cette arête soit normale au plan AOD'DD'' dans lequel se meuvent les axes des deux lunettes, condition qui sera réalisée si l'image du point O, réfléchie par AF ou AG, se voit toujours en coïncidence avec l'axe de la lunette C'D'', quel que soit l'angle d'incidence : on y parviendra au moyen de trois vis calantes *e, e, e*.

II. Pour mesurer A, on donne à la lunette une direction fixe C'D'', et l'on place le prisme dans deux positions successives, telles que l'image de O réfléchie, d'abord par AF, ensuite par la face AG amenée en AG', se voie en D''. Dans ces deux cas, AF et AG' sont dans le même plan, et A est supplémentaire de l'angle dont le prisme a tourné pour passer de la première à la deuxième position (*voir* p. 34*).

III. On trouvera l'indice en cherchant, comme il suit, le minimum de déviation. Supposons que la déviation soit d'abord égale à DAD''' et que la lunette soit dirigée suivant C''D'''. Quand on fait tourner le prisme dans un sens, cette déviation augmente; mais dans le sens contraire elle diminue. On continue de faire marcher le prisme dans ce dernier sens, et l'on déplace la lunette de manière à suivre le mouvement de l'image. Il arrive un moment où elle paraît s'arrêter suivant C'D', pour rétrograder ensuite, se dévier davantage et revenir en C''D'''. Ce moment d'arrêt est celui où la déviation devient minima. On la mesure : c'est l'angle DAD', et l'on calcule *n* par la formule connue

$$\sin\left(\frac{A + \delta}{2}\right) = n \sin \frac{A}{2}.$$

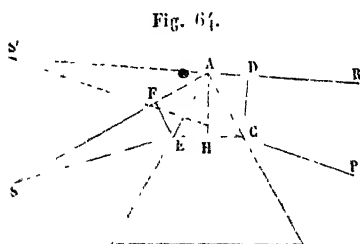
Ces opérations terminées, on procède à la vérification des formules de la manière suivante :

1° On donne au prisme des positions successives pour lesquelles l'incidence est *i, i', i'', ...*. On mesure avec soin cette incidence, qui est, dans tous les cas, complémentaire de la

moitié de l'angle DAD'' que font les rayons directs et les rayons réfléchis sur la face AF .

2° Pour chaque incidence, on mesure l'angle de déviation DAD' du faisceau réfracté, et l'on trouve des valeurs $\delta, \delta', \delta'', \dots$. D'un autre côté, puisque l'on connaît A et n , on peut, d'après les formules du prisme, calculer les déviations correspondant aux incidences mesurées i, i', i'', \dots . Or, dans tous les cas, on trouve que le calcul et l'observation sont rigoureusement d'accord. La loi des sinus est donc exacte, puisque ses conséquences sont vérifiées.

FOYER DU PRISME. — Dans ces expériences, le point lumineux O était reculé à l'infini. Si l'on dispose maintenant une fente étroite en S à une distance d (fig. 64), on trouve que,



pour la voir avec netteté à travers le prisme, il faut faire varier le tirage de la lunette en même temps que l'incidence. Cela tient à ce que les rayons, en sortant du prisme, sont dans les mêmes conditions que s'ils venaient d'un foyer vir-

tuel S' situé à une distance $S'C = x$, qui varie avec l'incidence des rayons et que nous allons calculer. Admettons que les rayons partis de S fassent entre eux un angle très petit; considérons l'un d'eux $SECP$, nous aurons

$$\sin i = n \sin r, \quad \sin i' = n' \sin r', \quad r + r' = A.$$

Pour $SADR$, très voisin du premier et passant par le sommet A ,

$$\sin(i + di) = n \sin(r + dr), \quad \sin(i' + di') = n' \sin(r' + dr')$$

$$r + r' + dr + dr' = A.$$

En développant les sinus et remarquant que $\sin di = di$, $\cos di = 1$, on trouve

$$\sin i + di \cos i = n \sin r + n dr \cos r,$$

$$\sin i' + di' \cos i' = n' \sin r' + n' dr' \cos r'.$$

En combinant ces équations avec celles qui correspondent au rayon SECP,

$$di \cos i = ndr \cos r, \quad di' \cos i' = ndr' \cos r', \quad dr = -dr'.$$

En éliminant dr et dr' , on a l'équation de condition

$$di \frac{\cos i}{\cos r} = - di' \frac{\cos i'}{\cos r'}.$$

Elle prouve que di et di' sont de signes contraires. Cela veut dire que, l'angle d'incidence du rayon SA étant plus grand que celui de SE, les angles d'émergence des mêmes rayons sont dans des conditions opposées. Donc CP et AR se rencontreront en un point S' situé du même côté que S; et, comme l'œil juge la position des objets par la direction des rayons qu'il reçoit, nous verrons une fente lumineuse en S'. Ce sera le foyer virtuel de S, dont nous allons calculer la distance S'C ou x . On a

$$SE = d, \quad \frac{EF}{d} = di, \quad \frac{DC}{x} = -di',$$

$$\frac{x}{d} = - \frac{DC}{EF} \frac{di}{di'} = \frac{DC}{EF} \frac{\cos i' \cos r}{\cos i \cos r'}.$$

Les triangles ADC et ACH donnent

$$\frac{DC}{AC} = \cos i', \quad \frac{AH}{AC} = \cos r',$$

$$DC = AH \frac{\cos i'}{\cos r'}.$$

On tire de même des triangles AEF et AEH

$$\frac{EF}{AE} = \cos i, \quad \frac{AH}{AE} = \cos r,$$

$$EF = AH \frac{\cos i}{\cos r}.$$

Remplaçant DC et EF dans la valeur de x ,

$$x = d \frac{\cos^2 i' \cos^2 r}{\cos^2 r' \cos^2 i}.$$

Si l'incidence décroît de 90° jusqu'à zéro, x prend les valeurs suivantes :

$$i = 90, \quad x = \infty,$$

$$i = i', \quad x = d,$$

$$i = 0, \quad x = d \left(\frac{1 - n^2 \sin^2 A}{\cos^2 A} \right).$$

Ces résultats conduisent à trois conséquences importantes.

CONSÉQUENCES. — 1° Si nous plaçons l'œil derrière le prisme, dans l'angle $RS'P$, nous devons voir une fente lumineuse en S' , puisque c'est le lieu où se rencontrent virtuellement et d'où sont censés partir les rayons qui nous arrivent; nous devons la voir à une distance variable x décroissant à mesure que l'incidence moyenne i diminue, et devenant égale à la distance d de la fente réelle S , quand la déviation est minima. Ce dernier résultat est indépendant de l'indice de réfraction du milieu employé. •

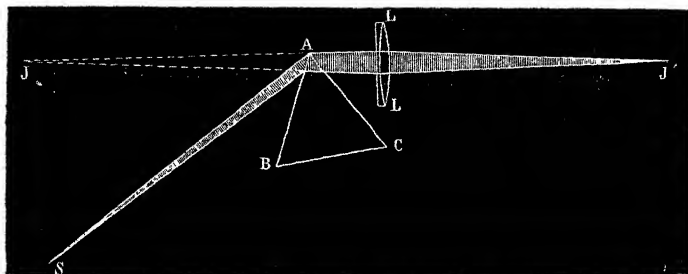
2° Au lieu de regarder l'image S' à l'œil nu, nous pourrions l'examiner avec une lunette, et nous la verrons distinctement, à la condition de faire varier le tirage de l'instrument, de façon qu'il pointe toujours en S' , c'est-à-dire à l'infini quand $i = 90$, à la distance d pour le cas où $i = i'$, et à $d \left(\frac{1 - n^2 \sin^2 A}{\cos^2 A} \right)$ lorsque $i = 0$. Grossie et rapprochée par la lunette, l'image virtuelle sera vue plus distinctement qu'à l'œil nu, et l'on en saisira mieux les détails.

3° On peut enfin fixer derrière le prisme une lentille convergente LL (*fig. 65*) ; celle-ci, recevant les rayons comme s'ils venaient de J , les fera converger en un foyer réel J' , où ils s'accumuleront; et, quand on placera un écran en ce point, on y devra voir l'image réelle et renversée de la fente. Le lieu de ce foyer dépendra de la distance x , ainsi que de la place et du degré de convergence de la lentille, et il pourra être déterminé à l'avance par le calcul.

Toutes ces prévisions se réalisent avec la plus grande exactitude en éclairant la fente S par la lampe à alcool salé. On voit donc qu'il n'y a plus rien d'inconnu au sujet de la réfraction de cette lumière spéciale. Elle suit la loi de Descartes dans

toutes ses conséquences; mais jusqu'à présent nous n'avons employé qu'elle. Il faut maintenant sortir de ces conditions toutes particulières, aborder le cas général et étudier la réfrac-

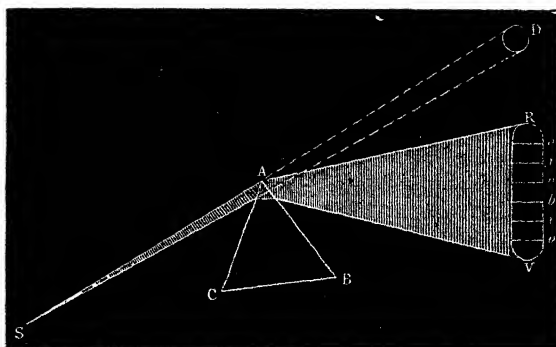
Fig. 65.



tion des rayons émis par une source quelconque; nous ne nous occuperons ici que des rayons du Soleil : les conditions seront entièrement différentes.

SPECTRE SOLAIRE. — Newton fit pénétrer, dans une chambre obscure, un faisceau solaire horizontal par une ouverture circulaire très petite S. Ce faisceau formait un cône de rayons d'un angle égal à $32'$ et dessinait sur l'écran opposé au volet une image blanche et circulaire du Soleil, en D (fig. 66). On

Fig. 66.



le reçut sur un prisme ABC dont les arêtes étaient verticales; il fut dévié en RV, et l'on vit sur l'écran une image allongée,

colorée d'une infinité de teintes de R en V. Cette image est le *spectre solaire*. Elle offre d'abord en R un rouge sombre qui s'éclaire peu à peu en même temps que sa couleur passe insensiblement à une teinte orangée; à son tour et par une dégradation continue, cet orangé se transforme en jaune, le jaune en vert, le vert en bleu, après quoi viennent l'indigo et le violet. Le spectre nous offre ainsi une succession de couleurs distinctes en nombre infini; mais, comme on ne peut les nommer toutes, on les a rapportées aux sept types principaux dont les noms suivent et qui sont rangés par ordre de déviation croissante : *rouge, orangé, jaune, vert, bleu, indigo, violet*.

RAIES DU SPECTRE. — En voyant la dilatation que le faisceau solaire éprouve dans le sens RV, Newton a admis que les diverses couleurs dont il est question étaient superposées et confondues dans le rayon incident, et qu'elles se séparaient en traversant le prisme, parce qu'elles sont diversement réfrangibles et inégalement déviées. Mais, si l'on veut démontrer rigoureusement cette conclusion, il faut observer le spectre par l'un des trois procédés que nous avons fait connaître (p. 84*) : c'est ce que Wollaston (1) fit le premier. Il fit passer la lumière des nuées à travers une fente verticale très mince et, plaçant l'œil à la distance de la vision distincte, il regarda cette fente à travers un prisme, également vertical, qui lui imprimait la déviation minimum. Dans ces conditions, le foyer virtuel du prisme est à la même distance de l'œil pour toutes les couleurs (p. 84). Wollaston vit donc un spectre virtuel offrant les mêmes successions de teintes que celui de Newton, mais il reconnut distinctement au milieu d'elles un petit nombre de raies noires qui semblaient séparer les couleurs par des traits verticaux, et qui étaient irrégulièrement distribuées, depuis le rouge jusqu'au violet; elles constituaient des groupes qu'on reconnaissait aisément et où elles occupaient chacune une place fixe. Wollaston n'eut pas l'idée d'employer une lunette pour les mieux observer, et il ne comprit pas l'importance de sa découverte. Quinze ans après, un opticien de Munich, Fraun-

(1) WOLLASTON, *Transactions philosophiques*, 1802.

hofer ⁽¹⁾, retrouva ces mêmes raies qu'on avait oubliées, et en fit l'objet d'une étude remarquable.

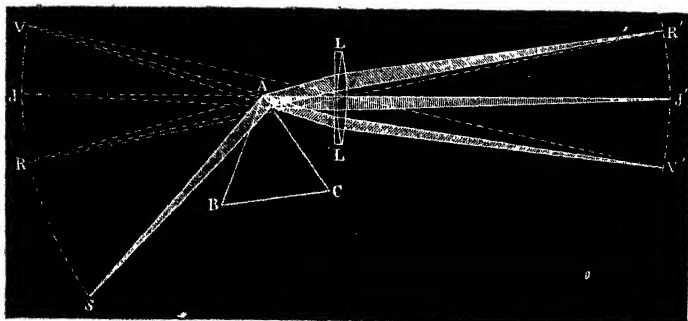
L'appareil qu'il employait était un cercle semblable à celui que nous avons décrit (*fig. 63*). Le prisme AFG y était fixé de la même manière; il était tourné au minimum de la déviation; le collimateur et la lunette étaient disposés comme précédemment, et cette lunette avait été préalablement pointée sur la fente à travers le collimateur. Dans ces conditions, Fraunhofer observa, non pas quelques raies, mais un nombre considérable de lignes noires très fines, distinctes, parallèles aux arêtes; il en compta plus de six cents. Elles ne sont pas égales en grosseur, ni placées à des distances régulières; elles se pressent à certains endroits pour s'écarter en d'autres, sans aucun ordre apparent. En étudiant attentivement la disposition des groupes principaux, Fraunhofer remarqua qu'ils sont toujours composés des mêmes raies élémentaires se suivant dans le même ordre et occupant les mêmes places dans la série des couleurs. On les retrouve avec tous les prismes et dans toutes les lumières qui viennent du Soleil, soit directement, soit après avoir été diffusées par les nuages ou les planètes. Les résultats changent avec des rayons provenant de sources différentes.

Étant constantes, les raies deviennent des repères excellents pour caractériser les diverses portions du spectre solaire, et l'on peut nommer les principales (*Pl. V, fig. 1*). Fraunhofer désigna les groupes qu'on voit à l'œil nu par les lettres de l'alphabet. Les trois premiers, A, B, C, sont dans le rouge: A à l'extrémité sombre, C près de l'orangé. D occupe la partie la plus brillante du spectre, entre l'orangé et le jaune: c'est une des raies les plus nettes; c'est la plus précieuse à cause de sa situation moyenne. Le jaune en contient trois qui sont très vives; la dernière est désignée par E. Le vert en renferme trois autres, presque équidistantes, dont la moyenne est représentée par F; G se voit entre le bleu et l'indigo. H est très large et termine le violet; on ne la voit que dans l'obscurité complète.

(¹) FRAUNHOFER, *Ann. de Gilbert*, t. LVI, p. 301 (*Memoires de l'Académie de Munich* pour 1814 et 1815, t. V).

Ces résultats montrent qu'après leur sortie du prisme les rayons sont dans les mêmes conditions physiques que s'ils partaient d'un objet RJV (*fig. 67*) qu'on verrait distinctement à l'œil nu ou avec la lunette, qui serait à une distance de A égale à AS, composé de bandes brillantes et de raies obscures

Fig. 67.



parallèles à la fente, et colorées de teintes variant à l'infini depuis le rouge R jusqu'au violet V.

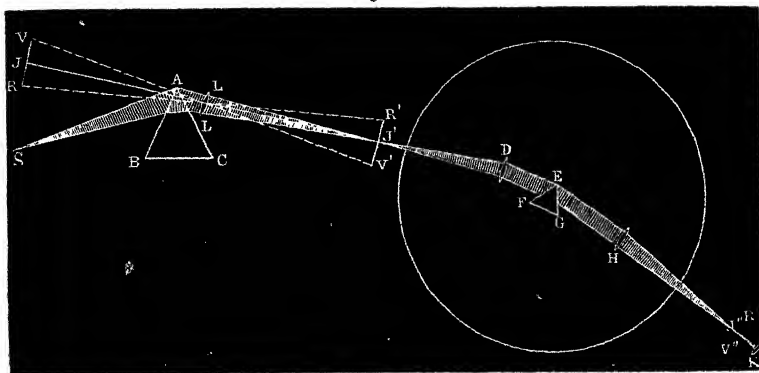
Cette conclusion se confirme en observant le spectre par la troisième méthode, comme le fit Fraunhofer, c'est-à-dire en recevant directement les rayons solaires SA d'abord sur le prisme ABC, ensuite sur une lentille achromatique LL. L'image virtuelle RJV, qu'on voyait avec la lunette et qui se formait à une distance AJ égale à AS, devient réelle en R'V' au foyer conjugué de RV; et, si on la reçoit sur un écran en R'J'V', on y distingue les mêmes raies disposées de la même manière dans les mêmes couleurs. Ce procédé permet de les montrer dans les cours publics.

LOI DE RÉFRACTION DE CHAQUE RAIE. — Il faut aller plus loin, prouver que la lumière émise par chacune des bandes brillantes virtuelles de RJV est analogue à celle de l'alcool salé, qu'elle a un indice particulier et qu'elle suit, sous toutes les incidences, la loi de Descartes. Il suffira pour cela de répéter avec chacune de ces lumières les vérifications que nous avons faites à propos de la flamme de l'alcool salé.

Pour cela, on commencera par disposer un spectre réel

en $R'J'V'$ (fig. 68), et on le recevra sur le collimateur du cercle divisé qui nous a jusqu'à présent servi. En déplaçant la fente parallèlement à elle-même, on la mettra en coïncidence avec une raie quelconqué J' , et l'on introduira ainsi dans le collimateur $J'D$ un faisceau divergent, qui sera exclusivement

Fig. 68.



composé de rayons identiques, qui tombera sur le prisme FEG , et dont on observera la déviation par la lunette HK . Or cette lumière ne donne plus de spectre; elle se réfracte en J'' sans se décomposer, comme le faisait celle de l'alcool salé; elle est *simple*. On mesure son indice, et l'on vérifie à son sujet l'exactitude des formules qui donnent δ et α : elle suit donc la loi de Descartes. On trouve que l'indice, et par suite la déviation, augmentent de R' à V' .

SIMPLICITÉ DES TEINTES. — L'expérience vient de montrer qu'en chaque lieu du spectre réel la lumière est simple. Il faut cependant s'entendre sur cette simplicité. Tous les rayons de même réfrangibilité viennent concourir en un même foyer sur une bande dont la largeur est comparable à celle de la fente S . Si donc on considère deux lumières partant de cette fente, et dont les indices soient très peu différents, elles donneront deux foyers qui pourront être en contact et même se superposer partiellement, sans être séparés par une raie obscure. Mais, si on les fait passer à travers 2, 3, ..., n prismes, l'écar-

tement de leurs images sera multiplié par 2, 3, ..., n , ce qui finira par dédoubler les deux couleurs qui paraissaient confondues après une seule réfraction. Citons un exemple remarquable. La lumière de l'alcool salé apparaît comme un simple trait lumineux quand on la regarde à travers un seul prisme et à l'œil nu. Observée avec une bonne lunette après son passage successif à travers deux ou trois prismes, elle se sépare en deux autres lignes très vives. Il en est de même de la raie obscure D du spectre solaire; elle se dédouble en deux raies principales coïncidant par leur réfrangibilité avec les raies brillantes de l'alcool salé ⁽¹⁾, et dans leur intervalle on distingue encore plusieurs autres raies très fines observées d'abord par M. Cooke ⁽²⁾, et dont M. Thollon ⁽³⁾ a fourni le catalogue exact. Ces dernières raies manquent dans le spectre de l'alcool salé.

On voit que la décomposition de la lumière par un seul prisme n'est pas complète, et qu'il est nécessaire de multiplier les réfractions pour résoudre en leurs éléments les groupes de foyers virtuels ou réels, comme on résout les nébuleuses astronomiques en étoiles distinctes. On y emploie un appareil nommé *spectroscope* (fig. 69) : la lumière arrive par un collimateur OC; la moitié supérieure de la fente est cachée par un prisme à réflexion totale, qui reçoit la lumière d'un point L placé latéralement, et qui la renvoie dans la direction de l'axe; mais les rayons du Soleil ou d'un luminaire L' pénètrent directement dans la partie inférieure de cette même fente. Cette disposition permet d'obtenir deux spectres superposés, provenant de deux sources différentes, et de comparer les raies qui les composent. En sortant du collimateur, la lumière traverse successivement une série de prismes qui reposent sur une plate-forme horizontale dressée, qu'on amène au minimum de déviation, en les faisant tourner autour d'axes verticaux A, B, C, D, E, H, et qu'on fixe par des vis α , β , γ ,

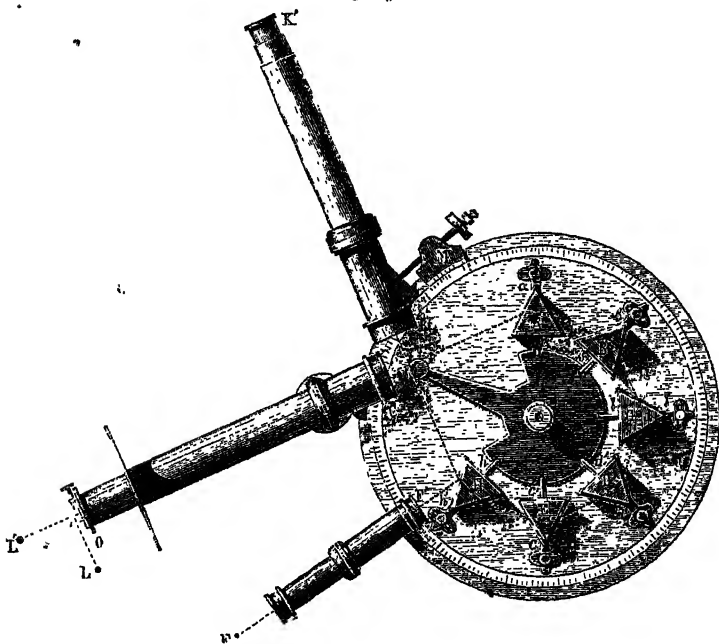
(1) Les raisons de cette coïncidence, signalées pour la première fois par Foucault (*l'Institut*, p. 49; 1849), seront données dans la suite (voir *Étude des radiations*).

(2) COOKE, *Ann. de Pogg.*, CXXVIII, p. 298.

(3) THOLLON, *Journal de Physique*, 2^e série, t. III, p. 5; 1884.

Le faisceau émergent HK est enfin reçu dans une lunette astronomique KK', munie d'un fort grossissement, et qui se meut au moyen d'une vis micrométrique M. Pour rapporter les mesures à des repères fixes, un second collimateur FF'

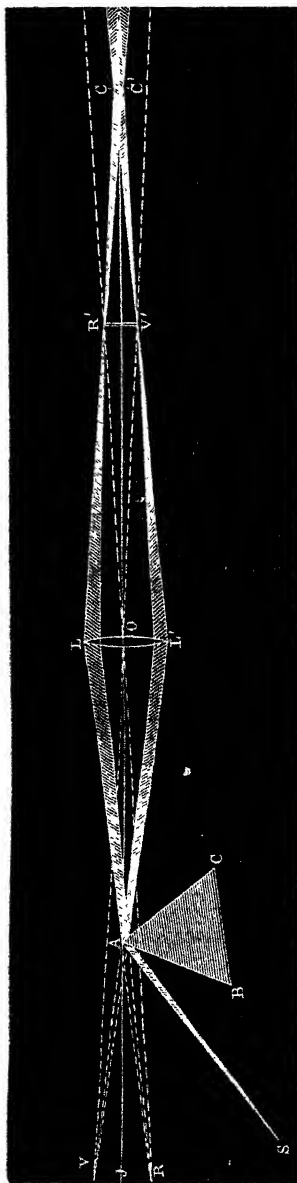
Fig. 69.



porte un micromètre tracé sur verre; les rayons partis de ce micromètre, se réfléchissant sur la face d'émergence du dernier prisme H, se joignent aux rayons réfractés, et l'observateur voit à la fois les traits du micromètre et les raies obscures. Celles-ci peuvent être reliées à ceux-là. C'est ainsi que M. Kirchhoff ⁽¹⁾ a pu dessiner plus de deux mille raies.

(¹) KIRCHHOFF, *Ann. de Poggendorff*, t. CIX, p. 148, t. CXVIII, p. 91, et *Ann. de Ch. et de Phys.*, 3^e série, t. LVIII (p. 254), et LXVIII, p. 5; 1863. Le Mémoire original *Sur le spectre solaire* est dans les *Abhandl. der Berliner Akademie*, 1861.

Fig. 70.



COMPOSITION DE LA LUMIÈRE BLANCHE. — Divisons la fente J' en deux moitiés (*fig. 68*); éclairons la partie supérieure par la lumière des nuées, et recevons successivement dans la moitié inférieure toutes les raies du spectre $R'V'$; puis regardons avec la lunette qui est astronomique et qui renverse les objets. Nous verrons en bas du champ de vision le spectre complet de la lumière blanche avec ses raies, et en haut le trait indécomposé de la lumière simple prise au spectre $R'V'$. Nous remarquerons que, sous toutes les incidences, les mêmes raies des deux lumières se voient sur une même ligne verticale.

Cela veut dire qu'en faisant arriver successivement par la fente J' , dans la même direction, sur le prisme EFG , toutes les lumières simples du spectre $R'V'$, elles donnent successivement et à leur place tous les éléments du spectre de la lumière blanche; par conséquent elles reproduiraient ce spectre dans son ensemble si elles arrivaient simultanément de la même fente sur le prisme EFG . D'où Newton a conclu que la lumière blanche n'est autre chose que cette superposition des lu-

mières simples diversement colorées et diversement réfrangibles du spectre.

Pour justifier cette conclusion, il restait à faire la synthèse de la lumière blanche, après en avoir fait l'analyse, c'est-à-dire à montrer qu'on la reproduit avec tous ses caractères, en réunissant en un même point toutes les lumières simples du spectre. Newton institua à ce sujet un très grand nombre d'expériences (¹); nous nous contenterons, pour le moment, de citer l'épreuve suivante. Ayant préparé, comme de coutume, un spectre RJV (*fig. 70*), on reçoit les rayons sur une lentille LL' qui donne un spectre réel en R'V', et un peu plus loin, en CC', l'image du point A : image commune à tous les rayons qui viennent s'y superposer et qui alors reproduisent la lumière blanche.

Les notions qui précèdent, relativement à la décomposition et à la recombinaison de la lumière, nous étaient indispensables pour continuer avec une rigueur suffisante nos études d'Optique géométrique. Nous y reviendrons plus tard avec de plus grands développements, quand nous nous livrerons à l'étude des radiations.

(¹) Voir *Étude des radiations*.

CHAPITRE V.

LENTILLES INFINIMENT MINCES. THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES INSTRUMENTS D'OPTIQUE.

Réfraction par une surface sphérique. — Lentilles. — Lentilles infiniment minces. — Lentilles convergentes et divergentes. — Construction des images. — Centre optique. — Mesure de la distance focale principale. — Aberration de réfrangibilité. — Aberration de sphéricité.

Conditions générales de la vision. — Besicles.

Instruments d'Optique. — Instruments simples. — Combinaisons objectives. — Chambre obscure. — Mégascope. — Méthode générale de projection. — Microscope solaire. — Phares. — Combinaisons oculaires. — Loupe. — Divers modèles.

Instruments composés. — Conditions générales. — Cas des lunettes. — Diaphragme. — Champ. — Réticule. — Axe optique. — Double tirage. — Anneau oculaire. — Grossissement. — Clarté. — Lunette astronomique. — Lunette terrestre. — Lunette de Galilée. — Télescopes de Newton, de Grégori, de Cassegrain, de Foucault.

Microscope. — Conditions physiques. — Conditions mécaniques. — Grossissement. — Microscope binoculaire.

Achromatisme. — Pouvoir dispersif. — Achromatisme des lentilles. — Achromatisme des prismes. — Diasporamètre. — Oculaire d'Huygens. Oculaire positif.

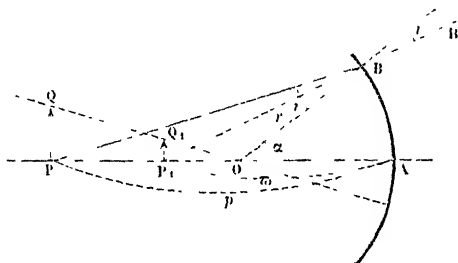
LENTILLES INFINIMENT MINCES.

RÉFRACTION PAR UNE SURFACE SPHÉRIQUE. — Soit (*fig. 71*) une surface sphérique AB , de rayon R , séparant deux milieux dont l'indice relatif est n ; nous supposons qu'elle est limitée à une zone de faible ouverture, ayant pour axe OA , et nous nous proposons d'étudier la réfraction d'un cône de rayons ayant pour sommet un point P de l'axe. Nous désignerons la distance PA par p , et nous la compterons positivement quand

le point P est situé dans le premier milieu, négativement quand il est situé dans le second.

Un rayon incident PB, faisant avec la normale OB l'angle i , se réfracte suivant BB' et vient rencontrer l'axe en un point

Fig. 71.



P_1 . Nous désignerons la distance $P_1 A$ par ϖ . Les quantités ϖ et R sont considérées comme positives quand elles sont dans la direction des p positifs, négatives dans la direction des p négatifs.

La loi de la réfraction fournit la relation

$$(1) \quad \sin i = n \sin r.$$

Les triangles OPB, OP₁B donnent d'autre part, en désignant par α l'angle AOB,

$$(2) \quad \sin i = \frac{\overline{PO} \sin \alpha}{\overline{PB}}, \quad \sin r = \frac{\overline{P_1 O} \sin \alpha}{\overline{PB}}.$$

En combinant les équations (1) et (2), on obtient

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\overline{PO}}{\overline{P_1 O}} &= n \frac{\overline{PB}}{\overline{P_1 B}} = n \sqrt{\frac{\overline{PO}^2 + R^2 + 2 \overline{PO} \cdot R \cos \alpha}{\overline{P_1 O}^2 + R^2 + 2 \overline{P_1 O} \cdot R \cos \alpha}}, \\ &= n \sqrt{\frac{\overline{PA}^2 - 2 \overline{PO} \cdot R (1 - \cos \alpha)}{\overline{P_1 A}^2 - 2 \overline{P_1 O} \cdot R (1 - \cos \alpha)}}. \end{aligned} \right.$$

Cette relation détermine la position du point P_1 , quand on connaît celle du point P et l'angle α . Elle est rigoureuse, et l'on en déduit que les rayons issus d'un point unique et ré-

fractés par une surface sphérique d'ouverture finie ne coupent pas l'axe exactement au même point. Il n'y a pas de foyer, mais une caustique, comme pour les miroirs.

Toutefois, si l'angle α demeure assez petit pour qu'on puisse négliger les quantités de l'ordre de α^2 , la relation (3) se réduit à

$$\frac{PO}{P_1O} = n \frac{PA}{P_1A}$$

ou

$$(4) \quad \frac{p-R}{\varpi-R} = n \frac{p}{\varpi},$$

qu'on écrit habituellement

$$(4 \text{ bis}) \quad \frac{n}{\varpi} - \frac{1}{p} = \frac{n-1}{R}.$$

Il est à remarquer que cette formule est générale, que le point P soit réel ou virtuel, et la surface sphérique concave ou convexe. Il suffit d'attribuer à p et à R le signe qui leur convient : la formule (4 bis) détermine ϖ en grandeur et en signe.

Rapport de grandeur de l'image à l'objet. — La même formule s'applique encore, au même degré d'approximation, à tout point Q situé en dehors de l'axe de la zone et, par suite, l'image P_1Q_1 d'une petite droite PQ, perpendiculaire à l'axe OA, est aussi une droite perpendiculaire à l'axe. Le rapport de grandeur de l'image à l'objet ou le grossissement est

$$\frac{\overline{P_1Q_1}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{P_1O}}{\overline{PO}} = \frac{\varpi-R}{p-R},$$

ou, d'après l'équation (4),

$$(5) \quad \frac{\overline{P_1Q_1}}{\overline{PQ}} = \frac{\varpi}{np}.$$

Suivant que ce rapport est positif ou négatif, l'image est droite ou renversée.

Nous poserons $\frac{nR}{n-1} = \varphi'$; la formule (4) prend alors la forme

$$(5) \quad \frac{1}{\varpi} - \frac{1}{np} = \frac{1}{\varphi'}.$$

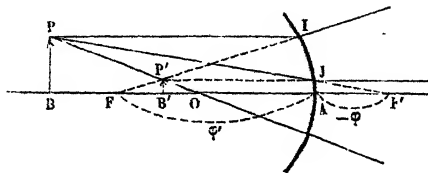
Quand on fait $p = \pm \infty$, c'est-à-dire quand les rayons incidents forment dans le premier milieu un faisceau parallèle à l'axe, on a $\varpi = \varphi'$. Suivant que φ' est négatif ou positif, le foyer de ces rayons est réel ou virtuel.

Supposons notamment que $R > 0$, c'est-à-dire que la surface sphérique est concave vers le milieu le moins réfringent; φ' est positif, et la discussion des formules (4) et (5) conduit aux résultats résumés dans le Tableau suivant :

OBJET.	f .	ϖ .	$\frac{\varpi}{np}$.	IMAGE.	
Réel.....	∞	$\varphi' = \frac{nR}{n-1}$	0	Virtuelle.	Droite et rapetissée.
	R	R	$\frac{1}{n}$		
	0	0	1	Reelle.	Droite et agrandie.
Virtuel ...	$-\frac{R}{n-1} = \varphi$	$+\infty$	$+\infty$	Virtuelle.	Renversée et agrandie.
	$-\frac{R}{n-1}$	$\frac{nR}{n-1}$	-1		
	$-\infty$	$\frac{nR}{n-1}$	-0		Renversée et rapetissée.

Remarquons ce qui se produit pour $p = -\frac{R}{n-1}$, c'est-à-dire pour un faisceau convergent dont le sommet est situé à une distance $\frac{R}{n-1}$ en arrière du point A; le faisceau réfracté

Fig. 7°.



est parallèle à l'axe. Réciproquement, si l'on considère des rayons parallèles à l'axe dans le second milieu, ils se réfractent

comme s'ils étaient issus d'un point F' (*fig. 72*), situé dans ce milieu à une distance de A égale à $-\frac{R}{n-1} = \varphi$. Cette distance φ est la deuxième distance focale de la surface sphérique.

On peut introduire les distances focales φ' et φ dans la formule (4 *bis*); elle devient

$$\frac{\varphi'}{\omega} + \frac{\varphi}{p} = 1.$$

Cette forme très symétrique est, comme nous le verrons plus tard, susceptible de généralisation.

Construction de l'image au moyen des deux foyers. — Quand on a déterminé les deux distances focales, on peut aisément construire l'image d'un point lumineux P situé hors de l'axe. Considérons (*fig. 72*) le rayon PI parallèle à l'axe; il se réfracte suivant P' et, d'autre part, le rayon PJ dirigé vers le point F' se réfracte parallèlement à l'axe suivant $P'J$. L'image P' du point P est au point d'intersection des deux rayons réfractés.

On peut encore remarquer que le rayon PO qui passe par le centre de la sphère n'est pas dévié par la réfraction : il passe donc par le point P' . On a, en définitive, trois rayons PO , $P'J$, $P'I$ passant au même point : il suffit d'en construire deux pour déterminer P' .

LENTILLES. — Sans nous attarder davantage à la discussion des formules (4) et (5), nous allons considérer de suite un cas d'un intérêt pratique beaucoup plus considérable et qui conduit à des résultats physiques plus simples, celui des lentilles infiniment minces.

On nomme *lentille* toute portion de milieu réfringent limitée par deux surfaces sphériques AI , $A'I'$ (*fig. 73*). Considérons un point lumineux P situé sur l'axe *principal* de la lentille, c'est-à-dire sur la droite OO' qui joint les centres des deux sphères. Les rayons issus du point P sont réfractés une première fois par la surface AI et se trouvent alors dans les mêmes conditions que s'ils étaient issus d'un point P_1 situé

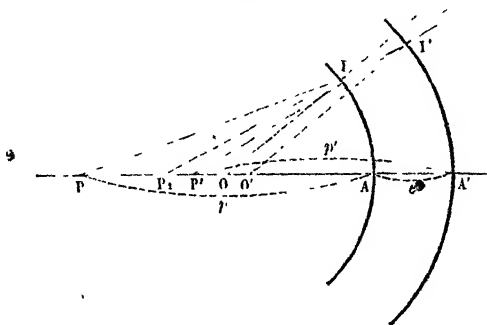
sur l'axe, à une distance ϖ du point A déterminée par la formule

$$(6) \quad \frac{n}{\varpi} - \frac{1}{p} = \frac{n-1}{R},$$

dans laquelle n est l'indice relatif du milieu dont est formée la lentille, par rapport au milieu extérieur.

Pour déterminer l'effet de la seconde réfraction, il suffit de remarquer que les nouvelles distances doivent être rapportées

Fig. 73.



au point A', c'est-à-dire qu'il faut remplacer dans (6) p par $\varpi + e$, et ϖ par p' . Au reste, l'indice correspondant au passage de la lentille dans le milieu extérieur est $\frac{1}{n}$. On a donc, en désignant par R' le rayon de la sphère A'I',

$$(7) \quad \frac{1}{np'} - \frac{1}{\varpi + e} = -\frac{n-1}{nR'};$$

les longueurs p' et R' sont comptées positivement dans le même sens que les précédentes.

Nous nous proposons d'obtenir une relation entre p et p' ; il faut donc éliminer ϖ entre (6) et (7). On trouve

$$(8) \quad \frac{e}{n} = \frac{p'R'}{R' + (n-1)p'} - \frac{pR}{R + (n-1)p}.$$

LENTILLES INFINIMENT MINCES. — Presque toujours, dans la pratique, l'épaisseur de la lentille est assez petite par rapport aux autres grandeurs qui figurent dans la formule (8), pour qu'on puisse la négliger ⁽¹⁾. C'est à cette approximation que tient l'extrême simplicité des résultats que donnent la théorie élémentaire des lentilles et celle de tous les instruments d'Optique constitués uniquement par des lentilles minces. Nous admettrons dans la suite de ce Chapitre que cette approximation est toujours légitime.

En faisant $e = 0$ dans la formule (8), elle se réduit à

$$(9) \quad \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = (n-1) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right).$$

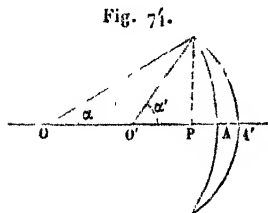
Faisons d'abord $p = \infty$, c'est-à-dire considérons un faisceau de rayons tombant sur la lentille parallèlement à son axe; la formule (9) donne pour p' la valeur f déterminée par la relation

$$(10) \quad \frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right);$$

pour $p' = \infty$, c'est-à-dire pour des rayons parallèles tombant sur la face opposée de la lentille, on trouve $p = -f$, c'est-à-dire que les foyers des rayons parallèles sont situés de part et d'autre de la lentille et à égale distance.

LENTILLES CONVERGENTES ET DIVERGENTES. — D'après la convention que nous avons faite sur les signes, quand f est positif, le foyer des rayons parallèles est situé du côté des rayons incidents, c'est-à-dire qu'il est virtuel (fig. 75); la lentille est

(1) Il en est ainsi, par exemple, quand les surfaces sphériques employées se rencontrent et que, prolongées jusqu'à leur intersection, elles n'ont qu'une ouverture négligeable; on a. en effet (fig. 74),



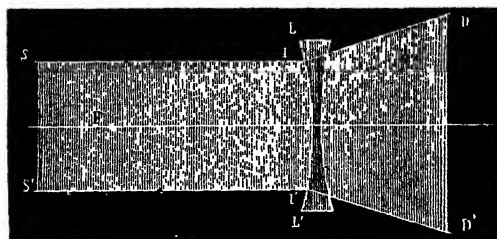
$$\begin{aligned} e &= AA' = PA' - PA \\ &= R'(1 - \cos \alpha) - R(1 - \cos \alpha'), \end{aligned}$$

et cette quantité est du second ordre de grandeur par rapport à α et α' .

dite *divergente*. Quand f est négatif, le foyer est réel et la lentille est *convergente* (fig. 76).

En général, la matière des lentilles est plus réfringente que

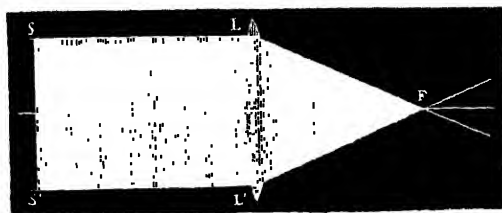
Fig. 75.



le milieu dans lequel elles sont plongées, c'est-à-dire que l'on

a $n > 1$; le signe de f est alors celui de $\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}$.

Fig. 76.



Pour que l'on ait $f > 0$ avec $R > 0$, il faut que R' soit négatif, nul ou enfin positif et $> R$. De là trois formes de len-

Fig. 77.

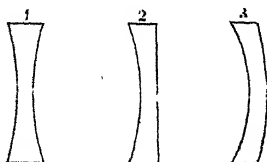
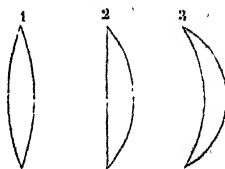


Fig. 78.



tilles divergentes, les lentilles biconcave, plan-concave et le ménisque divergent (1, 2, 3, fig. 77).

Pour que $f < 0$ avec $R' > 0$, il faut que R soit négatif, nul

ou positif avec des valeurs supérieures à R' , d'où les lentilles biconvexe, plan-convexe et le ménisque convergent (1, 2, 3, fig. 78). Les autres cas fournissent les mêmes lentilles retournées; et, comme on peut changer R en $-R'$ et R' en $-R$ sans changer la valeur de f , l'action de ces lentilles ne se trouvera pas modifiée.

En introduisant la distance focale principale f dans l'équation (9), elle devient

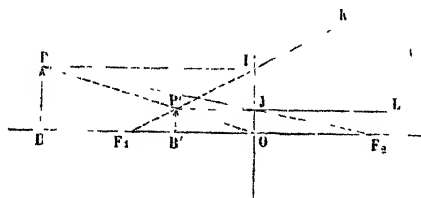
$$(11) \quad \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f}$$

et ne diffère plus de la formule des miroirs sphériques que par le signe de p (1).

Remarquons maintenant que, quand un objet est situé dans un plan perpendiculaire à l'axe d'une lentille, la réfraction opérée à la première surface fournit une image entièrement comprise dans un second plan perpendiculaire à l'axe; il en est de même de l'image fournie par la seconde réfraction. Aux foyers conjugués sur l'axe correspondent ainsi des plans focaux conjugués, ce qui complète l'analogie des lentilles infiniment minces avec les miroirs sphériques.

CONSTRUCTION DES IMAGES. — La construction des images peut être réalisée très simplement au moyen des foyers. Soit PB (fig. 79) un petit objet linéaire perpendiculaire à l'axe : le

Fig. 79.



rayon PI parallèle à l'axe se réfracte de telle sorte que sa di-

(1) On peut faire disparaître cette divergence par une convention particulière sur les signes, très usitée dans l'enseignement élémentaire, et consistant à compter p' positivement en sens contraire de p ; on convient en outre de

rection passe par le foyer F_1 correspondant ⁽¹⁾; le rayon PJ , dirigé vers le second foyer, émerge parallèlement à l'axe; la rencontre des deux rayons réfractés IF , JK détermine l'image P' du point P ; $P'B'$ est l'image de PB .

Le rapport de grandeur de l'image à l'objet est facile à trouver : les triangles IF_1O , $P'F_1B'$ donnent

$$\frac{\overline{P'B'}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{F_1B'}}{\overline{F_1O}} = \frac{f-p'}{f};$$

mais on tire de (11)

$$\frac{f-p'}{f} = \frac{f}{f+p} = \frac{p'}{p},$$

d'où

$$(12) \quad \frac{\overline{P'B'}}{\overline{PB}} = \frac{p'}{p}.$$

Quand ce rapport est positif, l'image est droite; quand il est négatif, elle est renversée.

CENTRE OPTIQUE. — Il résulte de l'équation (12) que la droite PP' passe par le point O . Ce point s'appelle *centre optique*, et tout rayon tel que POP' s'appelle *axe secondaire de la lentille*. On emploie souvent pour la construction des images le rayon POP' *sans déviation*, concurremment avec l'un des rayons PI ou PJ .

Les Tableaux ci-joints résument la discussion des formules (11) et (12) pour le cas des lentilles convergentes ou divergentes. Les figures qui suivent (*fig.* 80, 81 et 82) donnent des exemples de la marche des rayons à travers les lentilles dans les cas les plus usuels :

1° *Lentilles convergentes* (f est négatif $= -F$; de sorte que $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = -\frac{1}{F}$).

considérer comme positive la distance focale des lentilles convergentes, comme négative celle des lentilles divergentes. Cette convention est complétée par une autre relative aux rayons de courbure, lesquels sont comptés positivement quand ils sont disposés comme dans une lentille biconvexe.

(1) Situé du même côté si la lentille est divergente, du côté opposé si elle est convergente.

OBJET.	p .	p' .	$\frac{i}{o} = \frac{p'}{p}$.	IMAGE.	
Réal.	∞	$-F$	0	Réelle.	Renversée et rapetissée.
	Décroit.	Décroit.	Décroit.		Renversée et agrandie.
	$2F$	$-2F$	-1	Virtuelle.	Droite et agrandie.
Virtuel.	F	$+\infty$	$+\infty$		Droite et rapetissée.
	0	0	1	Réelle.	Droite et rapetissée.
	$-\infty$	$-F$	0		

Fig. 80.

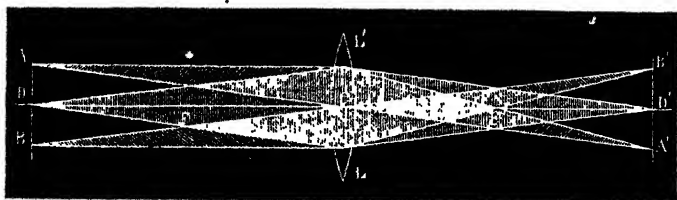
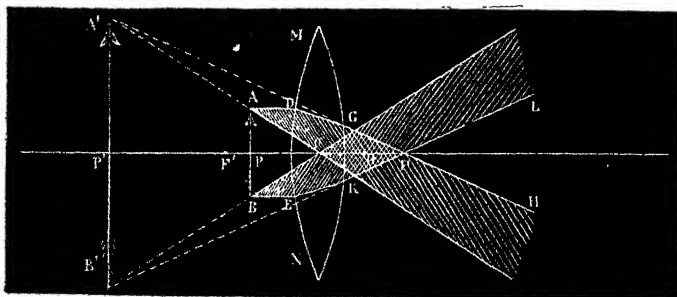


Fig. 81.

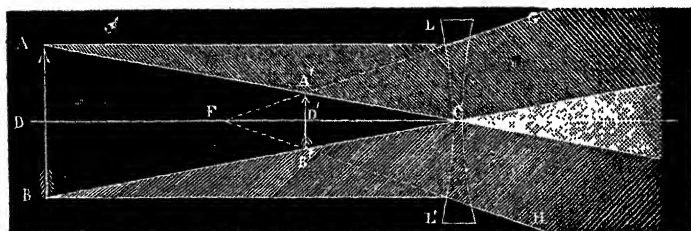


2° *Lentilles divergentes.*

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f}.$$

OBJET.	p .	p' .	$\frac{i}{o} = \frac{p'}{p}$.	IMAGE.	
•	∞	f	0	Virtuelle.	Droite et rapetissée.
Réel.	Décroit.	Décroit.	Croît.		
•	0	0	1	Réelle.	Droite et agrandie.
Virtuel.	$-f$	∞	∞		Renversée et agrandie.
	$-2f$	$-2f'$	1	Virtuelle	Renversée et rapetissée.
	$-\infty$	$-f$	0		

Fig. 82.



MESURE DE LA DISTANCE FOCALE PRINCIPALE D'UNE LENTILLE INFINIMENT MINCE. — Les lentilles infiniment minces ne se distinguent entre elles que par la grandeur et par le signe de la distance focale principale, f .

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right).$$

On peut calculer f si l'on connaît n , R et R' . Mais il est ordinairement beaucoup plus simple et aussi exact de mesurer f directement.

1° *Lentilles convergentes.* — On se borne parfois à faire tomber les rayons solaires sur la lentille et à mesurer directement la distance du foyer principal à la lentille. Mais la méthode inverse est susceptible d'un bien plus haut degré de perfection. Elle consiste à écarter ou rapprocher un point lu-

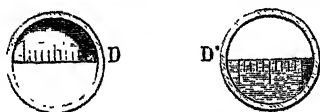
mineux de la lentille jusqu'à ce que les rayons émergents soient parallèles. On reconnaît que cette condition est réalisée d'une manière rigoureuse, en disposant au delà de la lentille une lunette réglée pour la vision à l'infini (¹). Quand le point lumineux est au foyer de la lentille, il devient nettement visible à travers le système formé par la lentille et la lunette braquée à l'infini.

Pour des lentilles de foyer médiocre, on préfère souvent mesurer les distances p et p' d'un objet lumineux et de son image réelle à la lentille et calculer f par la formule

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f}.$$

A cet effet on emploie avec avantage le focomètre de Silbermann. Cet appareil (*fig. 84*) est formé d'un support que l'on fixe sur le banc d'optique et dans lequel on monte la lentille à essayer ;

Fig. 83.



deux autres supports, mobiles sur le banc d'optique, portent deux diaphragmes en verre dépoli D , D' (*fig. 83*) portant une division opaque parfaitement identique, l'une sur sa

moitié supérieure, l'autre sur sa moitié inférieure. Le diaphragme D est éclairé par une lampe dont la lumière est concentrée par une lentille B , et l'on regarde D' à travers la loupe A .

L'opérateur agit sur une vis de rappel qui commande à la fois les supports des deux diaphragmes et permet de les approcher ou de les éloigner de la lentille L , mais de telle façon qu'elles demeurent à des distances égales par rapport à celle-ci. Il y a toujours une position pour laquelle l'image très nette de D , fournie par L , se superpose à D' , de telle sorte que les divisions de l'image se confondent avec celles de l'objet : alors les distances DL , $D'L$ sont égales à $2f$.

2° *Lentilles divergentes.* — On peut employer la formule des lentilles, en adjoignant à la lentille divergente de foyer x que l'on veut mesurer une lentille convergente de foyer f ,

(¹) Voir ci-dessous *Lunette astronomique*.

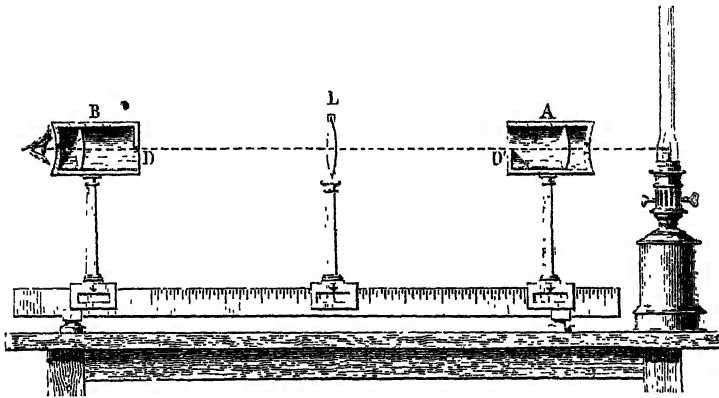
telle que le système fournisse une image réelle d'un objet réel. Si les lentilles se touchent, leur ensemble équivaut à une lentille convergente de foyer φ , tel que

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{f} + \frac{1}{x}$$

que l'on mesurera, ainsi que f , par l'une des méthodes ci-dessus indiquées.

On se borne souvent à couvrir la lentille divergente d'un carton, sauf deux points I et I' (fig. 75, p. 101*), et à l'exposer

Fig. 84.



aux rayons solaires. On reçoit les rayons réfractés sur un écran DD' qu'on éloigne jusqu'à ce que leur écart soit double de celui des points I et I'. Alors la distance de l'écran à la lentille est égale à la distance focale cherchée.

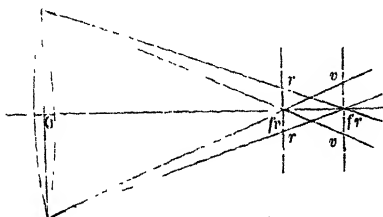
ABERRATION DE RÉFRANGIBILITÉ. — Les formules qui nous ont servi dans ce Chapitre ne s'appliquent qu'au cas d'une lumière homogène. Mais si l'on emploie de la lumière blanche, il y a autant de valeur de la distance focale f que d'espèces de rayons.

On a d'une manière générale

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right);$$

mais l'indice n_r des rayons rouges étant plus petit que l'indice n_v des rayons violets, on voit que le foyer f_r sera plus éloigné de la lentille que f_v (fig. 85).

Fig. 85.



La distance $f_r - f_v$ peut être prise pour mesure de l'aberration de réfrangibilité ⁽¹⁾. Elle est d'autant plus grande que la matière de la lentille possède un plus grand pouvoir dispersif, et que ses rayons de courbure sont plus considérables.

Si l'on place un écran au foyer des rayons violets, la lumière réfractée par la lentille dessinera sur l'écran un cercle à centre blanc et à bords rouges; tandis que, sur un écran placé au foyer rouge, on obtiendra un cercle à centre blanc et à bords violets.

En général, l'image d'un point lumineux se trouve entourée d'irisations qui deviennent particulièrement nuisibles à la netteté des images dans le cas des grandes lentilles, telles que les objectifs non achromatisés.

ABERRATION DE SPHÉRICITÉ. — Il faut encore remarquer que, dans notre étude géométrique des lentilles infiniment minces,

⁽¹⁾ Pour une lentille de crown de 5^m de foyer moyen (raie D), on trouve que la distance focale est pour le rouge (raie B)

$$f_B = 5^m,0357$$

et pour le violet (raie H)

$$f_H = 4^m,84467.$$

L'aberration entre B et H a donc pour valeur

$$f_B - f_H = 0^m,19103$$

ou environ 0^m,19.

nous nous sommes bornés à une première approximation, et qu'il y a eu lieu de déterminer expérimentalement si les images sont d'une netteté suffisante.

Le calcul complet des aberrations est long et difficile. Nous nous bornerons à calculer l'aberration longitudinale principale pour une surface réfringente unique.

L'équation des foyers conjugués, exacte aux quantités près de l'ordre de la quatrième puissance de la demi-ouverture $\theta > \alpha$, est

$$(1 \text{ bis}) \quad \frac{n}{\varpi} - \frac{1}{p} = \frac{n-1}{R} + \frac{n-1}{2n^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{n+1}{p} \right) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{p} \right)^2 R^2 z^2.$$

Pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire pour les rayons centraux, ou a rigoureusement

$$\frac{n}{\varpi} - \frac{1}{p} = \frac{n-1}{R}.$$

Pour les rayons marginaux, il faut remplacer dans la formule (1 bis) α par la demi-ouverture θ .

En faisant $p = \infty$, on tire de (1 bis) la valeur de ϖ dont on retranchera $\frac{nR}{n-1}$; on obtiendra ainsi la valeur de l'aberration longitudinale principale λ

$$\lambda = - \frac{R \theta^2}{2n(n-1)};$$

λ est de l'ordre de grandeur de θ^2 , et son expression est exacte aux quantités près de l'ordre de θ^4 (1).

L'aberration longitudinale est nulle quand le dernier terme du second membre de (1 bis) est nul, c'est-à-dire pour les deux positions du point lumineux correspondant à

$$p = R \quad \text{et} \quad p = (n+1)R.$$

(1) Soient $R = -\frac{10^m}{3}$, $n = \frac{3}{2}$. Le foyer des rayons centraux est à 10^m en arrière de la surface réfringente; l'aberration λ a pour valeur $0^m,006092$ pour une ouverture de 3° , et $0^m,6092$ pour une ouverture de 30° . Le foyer des rayons marginaux est plus voisin de la surface que le foyer des rayons centraux.

Dans le premier cas, le point lumineux est au centre de la surface réfringente; on démontrera sans peine géométriquement ⁽¹⁾ que l'aberration est identiquement nulle pour la seconde position du point lumineux.

Un calcul analogue au précédent, appliqué à une lentille infiniment mince, serait sans grand intérêt; car, au second degré d'approximation, on doit nécessairement tenir compte de l'épaisseur des lentilles. La théorie fournit pour les lentilles épaisses des formules trop compliquées pour trouver place ici.

Elles montrent que les lentilles plan-convexes, tournant leur convexité aux rayons incidents, sont en général plus avantageuses, au point de vue des aberrations, que les lentilles biconvexes et les ménisques de même foyer, et que deux lentilles plan-convexes, se tournant leur convexité, peuvent fournir un système très convergent, avec des aberrations modérées.

INSTRUMENTS D'OPTIQUE.

CONDITIONS GÉNÉRALES DE LA VISION. — Ce n'est pas ici le lieu de faire l'étude complète de l'œil. Il suffira de rappeler que la vision est liée à la formation d'une image réelle et renversée des objets, produite sur la rétine par l'action des milieux de l'œil. Ces milieux, la cornée transparente, l'humeur aqueuse, le cristallin, l'humeur vitrée, terminés par des surfaces sphériques possédant un même axe, constituent un système optique

⁽¹⁾ On a alors (fig. 71, p. 95*)

$$\overline{PO} = p - R : nR, \quad \frac{\overline{PO}}{R} = n = \frac{\sin i}{\sin(\alpha - i)};$$

d'où

$$(1) \quad \alpha = i + \epsilon.$$

D'ailleurs,

$$\frac{\overline{P'O}}{R} = \frac{\sin r}{\sin(\alpha - r)}$$

ou, d'après (1),

$$\frac{\overline{P'O}}{R} = \frac{\sin r}{\sin i} = \frac{1}{n},$$

c'est-à-dire

$$\overline{P'O} = \frac{R}{n}.$$

Le point P' est donc fixe quel que soit α .

disposé de manière à fournir sur la rétine une image nette des objets placés en avant de l'œil à une distance convenable.

Mais ce qui distingue l'œil d'un système optique invariable, c'est la faculté de l'*accommodation*. L'objet regardé peut se déplacer entre certaines limites; l'œil dirigé volontairement sur cet objet subit des modifications intérieures, telles que l'image se forme toujours sur la rétine : c'est surtout le cristallin dont les courbures se modifient, de manière à produire la variation voulue du foyer du système.

Les diverses vues diffèrent principalement par la valeur normale de leur distance focale principale ⁽¹⁾ et d'une manière secondaire par l'amplitude de leur accommodation. On se borne habituellement à classer les diverses vues d'après la valeur du premier élément.

Une vue *normale* à l'état de repos est accommodée pour l'infini; mais, par une action volontaire, elle est capable de s'accommoder entre une distance minimum de l'objet égale au moins à 20^{cm} ou 30^{cm} jusqu'à l'infini. Une vue *presbyte* ne diffère d'une normale que par la valeur plus grande (50^{cm} au moins) de la *distance minimum de la vision distincte*.

Une vue *myope* s'accommoder entre deux distances finies, l'une minimum, l'autre maximum, et c'est pour cette dernière que l'œil est naturellement accommodé. Pour la plupart des vues myopes, la distance minimum de la vision distincte est plus faible que pour les vues normales.

Enfin, une vue *hypermétrope* est une vue naturellement accommodée pour des faisceaux lumineux, plus ou moins convergents, c'est-à-dire pour des points lumineux virtuels ⁽²⁾.

ESICLES. — On remédie aux défauts de la vue au moyen de verres convergents ou divergents qu'on place devant l'œil de

(1) On peut entendre par là celle qui conviendrait à une surface sphérique coïncidant avec la cornée transparente, et séparant l'air d'un milieu oculaire fictif destiné à remplacer les divers milieux de l'œil, et dont l'indice serait déterminé par la condition que le point conjugué du point regardé et vu sans aucun effort d'accommodation coïncide avec la rétine.

(2) Dans ce qui suit nous entendons par *position de l'œil* la position du premier point nodal de l'organe visuel. Voir au Chapitre suivant.

manière à en modifier la distance focale normale. Les myopes doivent, pour voir les objets éloignés, se munir de besicles divergentes qui substituent à ces objets des images plus rapprochées de l'œil ; si l'on choisit ces besicles telles que la limite supérieure de la vision distincte soit à l'infini, la limite inférieure se trouve reculée aussi, et, suivant l'étendue du pouvoir d'accommodation, la vue exercée par l'intermédiaire des besicles devient normale ou presbyte ; si l'on exagérerait la divergence des besicles, la vue deviendrait hypermétrope.

Les personnes hypermétropes doivent à leur tour employer des besicles convergentes et acquièrent une vision normale ou myope ; les presbytes non hypermétropes emploient des verres convergents et leur vue jouit alors des propriétés de la vue myope.

INSTRUMENTS D'OPTIQUE. — Les instruments d'optique sont destinés à modifier les conditions de la vision des objets, en leur substituant des images, soit réelles, soit virtuelles, dans des conditions plus favorables que celles où se trouvent les objets eux-mêmes. On les dispose en général de façon que ces images, placées à une distance où peut s'effectuer la vision distincte, sous-tendent un angle visuel le plus grand possible.

Les instruments qui fournissent des images réelles des objets peuvent être désignés sous le nom d'*instruments objectifs* ; on appelle *instruments oculaires* ceux qui, comme les besicles, fournissent des images virtuelles. Ce sont deux sortes d'éléments qu'il convient d'étudier à part. On les réunit de diverses manières dans des appareils moins simples, pouvant à volonté produire les deux sortes d'images, et qu'on appelle *instruments composés*. Nous étudierons ces derniers en troisième lieu.

1° INSTRUMENTS SIMPLES.

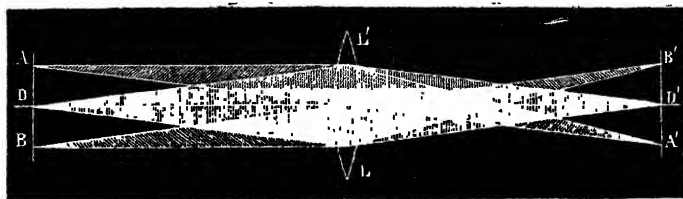
I. COMBINAISONS OBJECTIVES. — Nous connaissons deux sortes d'organes simples fournissant des images réelles des objets réels : les miroirs concaves et les lentilles convergentes. L'objet doit être placé à une distance de l'appareil supérieure à sa distance focale principale f ; si elle est comprise entre f et

$2f$, l'image est agrandie; elle est rapetissée quand cette distance est comprise entre $2f$ et $+\infty$.

Les lentilles sont susceptibles de fournir les combinaisons objectives les plus variées.

CHAMBRE OBSCURE. — Plaçons une lentille LL' au volet d'une chambre obscure; les objets extérieurs AB (*fig. 86*) forme-

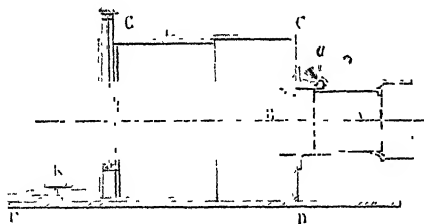
Fig. 86.



ront leur image renversée au foyer conjugué $A'B'$; et, si l'on place un écran en $A'B'$, il diffusera cette image qui deviendra visible de tous les points placés en avant.

La chambre obscure (¹) est l'appareil essentiel de la Photographie; le modèle adopté (*fig. 87*) se compose d'une lentille

Fig. 87.



achromatique B qui est fixe et d'une seconde A qui est mobile au moyen d'un pignon a . En superposant ces deux lentilles, on diminue la distance focale, puisqu'elles ajoutent leur convergence; et, en faisant mouvoir l'une d'elles, on change un peu cette distance, ce qui permet de mettre l'image exactement au

(¹) Imaginée par J.-B. Porta, *Magia naturalis*. Neapoli, 1558.

J. et B., *Optique*. — III. 2^e fasc.

En B'A', l'instrument est percé d'une fente rectangulaire verticale dans laquelle on introduit ou un verre sur lequel ont été dessinés des objets, ou le plus souvent une image photographique positive sur collodion. Ces images *ab*, quelle que soit leur nature, sont fixées verticalement et renversées; elles reçoivent toute la lumière concentrée dans la fente B'A' et la laissent passer ou l'arrêtent suivant leur transparence en chaque point. En KK' est une lentille achromatique dont le foyer est un peu après l'objet *ab*; elle donne de cet objet une

Fig. 89.

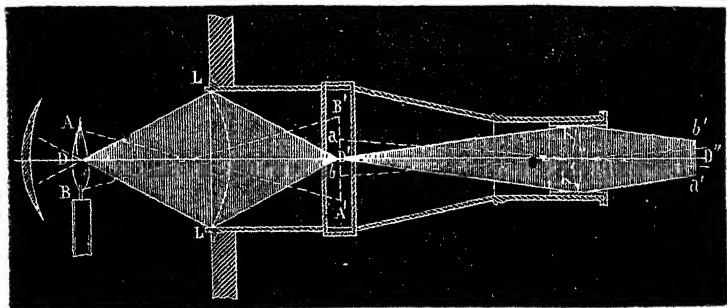
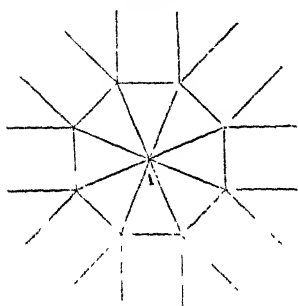


image agrandie, redressée, qu'on reçoit sur un écran afin de la diffuser dans tous les sens et de la rendre visible à une assemblée nombreuse. On met au point en déplaçant un peu la lentille KK' au moyen d'un pignon et d'une crémaillère. Cet appareil a été inventé par le P. Kircher ⁽¹⁾, sous le nom de *lanterne magique*. L'éclairage se faisait avec une lampe, et les objets projetés étaient peints sur verre avec des couleurs transparentes. Quelquefois les peintures étaient faites sur plusieurs verres superposés, les uns fixes, les autres qu'on déplaçait, ce qui permettait d'animer les tableaux projetés. En éloignant la lanterne de l'écran ou en la rapprochant et en déplaçant en même temps la lentille KK', on pouvait agrandir ou diminuer les images comme si les objets marchaient vers l'observateur ou s'éloignaient de lui.

(1) ATH. KIRCHER, *Ars magna lucis et umbræ*; Romæ, 1646.

(fig. 92), il a huit systèmes de lentilles et de prismes, et envoie dans l'espace huit cylindres lumineux qui portent à 10 ou 15 lieues; mais, comme ils sont séparés par des espaces prismatiques non éclairés, on a donné à l'appareil un mouvement de

Fig. 92.



rotation uniforme. Chaque point de l'horizon reçoit la lumière à des intervalles qui varient d'un phare à l'autre et permettent de reconnaître le lieu de la côte où l'on aborde. Les éclats successifs sont séparés par des éclipses.

M. Reynaud ⁽¹⁾, directeur de l'administration des phares, a remplacé au cap de la Hève l'éclairage à l'huile par celui de la lumière électrique. Celle-ci est

fournie par la machine magnéto-électrique de la Compagnie l'*Alliance*, et un régulateur de M. Serrin remplace la lampe centrale. Le succès de cette substitution a été complet. La dépense n'a point été augmentée et la quantité de lumière versée sur la mer a été considérablement accrue.

II. COMBINAISONS OCULAIRES. — LOUPE. — Nous arrivons maintenant à l'emploi qu'on a fait des images virtuelles pour observer et grossir les objets très déliés (fig. 93).

Soient MN la lentille, F' son foyer; on place en AB, entre la lentille et ce foyer, tout près de lui, l'objet qu'on veut observer. Un rayon AC, qui passe par le centre optique, traverse la lentille sans déviation. AD, parallèle à l'axe, suit la route ADGF et passe par le foyer principal F. AC et GF divergent, mais sont censés partir du foyer virtuel A'. De même, les rayons envoyés par B seront, après la réfraction, dans les mêmes conditions que s'ils partaient de B', et l'œil placé en O verra en A'B' l'image droite et grossie de AB.

⁽¹⁾ REYNAUD, *Mémoire sur l'éclairage et le balisage des côtes de France*. Paris, 1865.

La formule de la lentille donne, en désignant par f la valeur absolue de la distance focale principale,

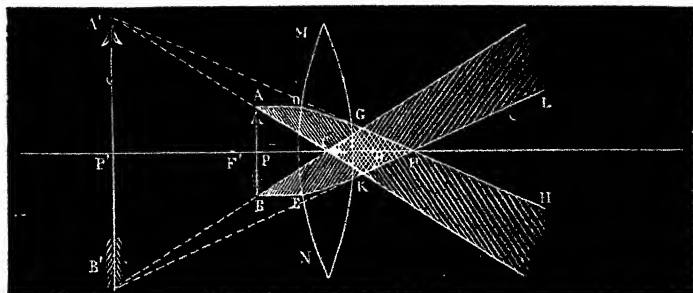
$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{f}, \quad \frac{i}{o} = \frac{p'}{p} = 1 + \frac{p'}{f}.$$

Le grossissement g est égal au rapport de la grandeur de l'image à celle de l'objet

$$g = \frac{i}{o} = 1 + \frac{p'}{f}.$$

Pour que l'on voie distinctement l'image, il faut que sa dis-

Fig. 93.



tañce à l'œil O ⁽¹⁾ soit égale à la distance minimum de la vision distincte Δ ou qu'on ait

$$p' = OP' - OG = \Delta - d;$$

donc

$$G = 1 + \frac{\Delta - d}{f} \quad (2).$$

Ce grossissement est maximum si $d = 0$, c'est-à-dire si l'œil est contre la loupe; il devient

$$g = 1 + \frac{\Delta}{f}.$$

⁽¹⁾ Point nodal antérieur.

⁽²⁾ On considère souvent un autre élément qu'on nomme *puissance* de la loupe; c'est le plus grand diamètre apparent sous lequel la loupe permet de voir l'unité de longueur, habituellement le millimètre. L'objet étant vu à la

En général, les loupes ont une distance focale f beaucoup plus petite que Δ ; $\frac{\Delta}{f}$ est assez grand pour qu'on puisse négliger l'unité dans le second membre, et le grossissement s'exprime approximativement par

$$G = \frac{\Delta}{f}.$$

On obtient directement cette relation en considérant les deux triangles APC, A'P'C' qui donnent, en supposant P confondu avec F', ce qui est sensiblement vrai,

$$G = \frac{\overline{A'P'}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{P'C}}{\overline{PC}} = \frac{\Delta}{f}.$$

Puisque le grossissement est en raison inverse de f , il faut, pour obtenir un grossissement considérable, employer des lentilles à courbures très prononcées; mais alors elles ont de grandes aberrations de sphéricité et l'on ne voit distinctement que dans la direction de l'axe. Le mieux est de superposer plusieurs lentilles peu convergentes et de les séparer par un diaphragme. Ce système, nommé *doublet*, imaginé par Wollaston ⁽¹⁾, ne laisse passer que les rayons voisins de l'axe. Il donne un fort grossissement qui dépend de la distance du

distance minimum Δ de la vision distincte, et ayant pour dimension apparente g^{app} , l'expression de la puissance est

$$P = \frac{g}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} + \frac{1 - \frac{d}{\Delta}}{f} = \frac{1}{\Delta} \left(1 - \frac{d}{f} \right) + \frac{1}{f}$$

ou, si l'on suppose d très petit, même par rapport à f , sensiblement

$$P = \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{f}.$$

Cette quantité varie très peu d'une espèce de vue à une autre, à cause de la petitesse de f . Elle est un peu plus grande pour les vues myopes que pour les vues presbytes.

⁽¹⁾ WOLLASTON, *A Description of a microscopic doublet* (*Philosophical Transactions*, 1829, p. 9).

point lumineux, de celle des verres et de leurs longueurs focales, et que l'on pourra calculer au moyen des formules générales des lentilles.

Considérons, en particulier, le cas de deux lentilles infiniment minces O et O' dont les distances focales, prises en valeur absolue, sont

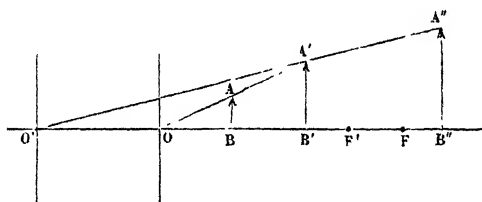
$$f = \overline{OF}, \quad f' = \overline{O'F'}.$$

Le grossissement du système peut être déterminé de la manière suivante. On a

$$G = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}.$$

Supposons l'œil (*fig. 94*) confondu avec le centre optique O'

Fig. 94.



de la loupe la plus voisine, nous aurons

$$\frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = 1 + \frac{\Delta}{f'},$$

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = 1 + \frac{\overline{OB'}}{f}$$

ou, en remplaçant O'B' par sa valeur en fonction de Δ , de f' et de la distance $OO' = D$,

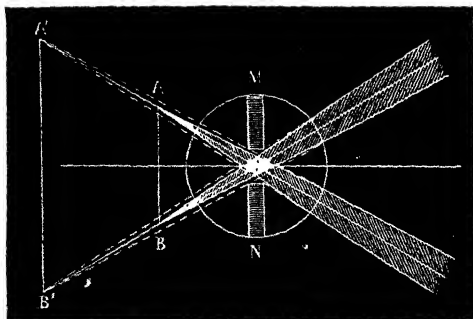
$$\frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = 1 + \frac{1}{f} \left(\frac{\Delta f'}{\Delta + f'} - D \right).$$

On a donc, pour l'expression du grossissement ⁽¹⁾,

$$G = \left(1 + \frac{\Delta}{f'}\right) \left[1 + \frac{1}{f} \left(\frac{\Delta f'}{\Delta + f'} - D\right)\right].$$

On fait des doublets très simplement en creusant dans une sphère une gorge *Mn* (*fig. 95*) et la remplissant d'une matière

Fig. 95.



opaque. Les seuls rayons venant d'un point quelconque A, qui traversent la masse, sont peu obliques aux faces extrêmes, l'appareil n'a que très peu d'aberration, mais son champ est très étendu. On réalise les mêmes conditions par la loupe de Stanhope, qui est un cylindre AB plan-convexe (*fig. 96*). On fixe en A les objets qu'on veut voir, et l'on regarde par B; la vision se fait comme si l'objet A était dans le verre.

Fig. 96.



Nous étudierons ultérieurement les diverses combinaisons de lentilles employées comme oculaires. Cette question ne peut être traitée utilement qu'à propos de l'achromatisme.

⁽¹⁾ Wollaston faisait le plus souvent

$$f' = 3f, \quad D = \frac{3}{2}f.$$

Il en résultait

$$G = \frac{5}{6} \frac{\Delta}{f} - \frac{1}{2},$$

ou sensiblement

$$G = \frac{5}{6} \frac{\Delta}{f}.$$

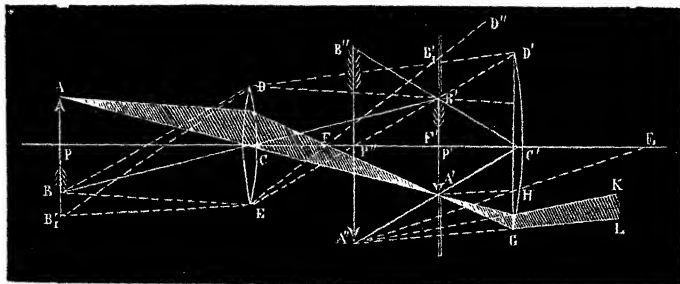
2° INSTRUMENTS COMPOSÉS.

Les lunettes, les microscopes et les télescopes sont construits sur un plan commun qu'on va étudier généralement (*fig. 97*), en considérant les lentilles dont ils se composent comme infiniment minces.

En. DE est une première lentille nommée *objectif*. Tout objet lumineux réel AB placé au delà de son foyer principal fournit une image réelle et renversée A'B'. Tous les rayons partis d'un point tel que A se croisent en A' divergent ensuite en continuant leur route, comme si A' était un point lumineux réel; et, les mêmes conditions étant réalisées pour toutes les parties de l'image A'B', on peut la considérer comme un véritable objet émettant de la lumière.

Dès lors on peut la regarder à travers une loupe GD'. On détermine suivant l'usage la marche des rayons. Parmi tous ceux qui partiraient d'un point réel A', on choisit l'axe secondaire A'C' qui ne se dévie pas; puis un rayon A'H, parallèle à l'axe, qui, après la réfraction, passerait par le foyer F₁; on joint F, H qu'on prolonge jusqu'à la rencontre de C'A' (*fig. 97*)

Fig. 97.



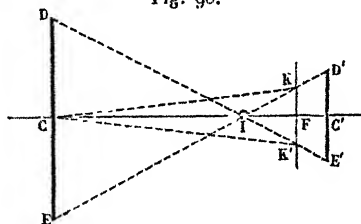
en A'', et A'' est le foyer conjugué de A'. La figure montre comment le cône des rayons DAC se concentre d'abord en A', diverge ensuite suivant le faisceau en HA'G; celui-ci se réfracte en HK, GL comme si les rayons venaient de A''. Si l'œil est derrière la loupe et qu'il reçoive ces rayons, il verra l'image en A''.

et il la verra distinctement quand elle sera à la distance de la vision distincte.

En résumé, l'instrument composé se borne à produire une image réelle très rapprochée de l'observateur qui la regarde avec une loupe.

DIAPHRAGME. — CHAMP. — On fixe dans le plan focal $A'B'$ une lame de métal noirci, percée en son milieu d'une ouverture circulaire. En même temps que l'image, l'œil voit distinctement les bords de cette ouverture qui encadrent le champ de vision. Il faut la placer nécessairement dans ce plan focal, car son contour est confus si on l'éloigne ou qu'on la rapproche. Il faut en outre que l'ouverture soit limitée (*fig. 97*) au cône intérieur tangent aux bords de l'oculaire et de l'objectif. En effet, le cône des rayons réfractés qui proviennent du point B (*fig. 97*) a son sommet en B' ; il est tout entier recueilli par l'oculaire $D'G$ et peut entrer dans l'œil. Le cône qui part de B se réfracte en $DB'E$ et se continue par $D'B'E'$; il n'entre ni dans la lentille ni dans l'œil. Le tableau focal des points compris entre B et B_1 , qui se place entre B' et B'_1 , offre donc

Fig. 98.



un éclat décroissant que l'on évite en limitant le diaphragme au point B' sur la ligne ED' menée par les limites des deux verres.

On appelle *champ* d'un appareil d'optique l'angle dans lequel doivent être compris les objets extérieurs pour être visibles. Cet angle est égal et opposé par le sommet à l'angle KCK' , sous-tendu au centre optique de l'objectif par les bords du diaphragme (*fig. 98*).

RÉTICULE. — Quand un instrument est destiné à opérer des visées ou des mesures angulaires, on a recours à deux fils d'araignée croisés tendus sur le diaphragme. On les voit en même temps que $A'B'$, puisqu'ils sont superposés à cette image. Soit P' leur point de croisement; la ligne CP' , qui joint ce point

au centre optique C de l'objectif, est l'*axe optique* de l'instrument.

Le point P de l'objet visé qui est situé sur le prolongement de cet axe fait son foyer sur la ligne qui le joint à C, c'est-à-dire en P', et réciproquement, si l'image de P est en P', P sera sur l'axe. Il suffira donc d'amener l'image d'un point en P' pour conclure que ce point est dans la direction de l'axe optique, et les déplacements angulaires qu'il faudra donner à cet axe pour voir successivement l'image de plusieurs points en P' seront les angles sous lesquels on voit ces points du lieu de l'observation.

L'axe optique peut être déplacé et réglé à volonté en déplaçant le réticule. D'autre part, toute lunette a un axe géométrique, celui qui passe par les centres des collets égaux sur lesquels elle est supportée : c'est aussi celui dont on détermine la direction sur les cercles divisés dont tout instrument d'optique géométrique est pourvu. Il faut autant que possible faire coïncider ces deux axes. Pour cela on fait tourner la lunette sur ses collets, c'est-à-dire autour de son axe géométrique, et, l'axe optique décrivant un cône, on voit la croisée des fils parcourir un cercle sur les points du tableau focal, cercle dont le rayon diminue et finit par s'annuler quand on déplace l'axe optique jusqu'à le faire coïncider avec l'axe géométrique.

Soit α l'angle sous-tendu par le fil du réticule vu du centre optique de l'objectif. Tout déplacement de l'axe de la lunette supérieur à cet angle détruira la coïncidence apparente du point visé avec le fil réticulaire. La précision de la visée est donc en raison inverse de cet angle; elle est, par conséquent, sensiblement proportionnelle à la longueur de la lunette et inverse de la largeur des fils.

Il est essentiel que le tableau focal et le réticule soient dans le même plan; si celui-ci est en arrière, on voit les points du tableau se porter vers la gauche quand on incline la tête à droite; s'il est en avant, c'est le contraire, et, lorsque la coïncidence est parfaite, il n'y a point de parallaxe des fils. On comprend la nécessité d'établir cette coïncidence : on y parvient comme il suit.

TIRAGE. — Pour voir distinctement les fils du réticule et le diaphragme, il faut que leur image virtuelle donnée par la loupe soit à la distance de vision distincte, et celle-ci, étant variable pour les divers individus, doit pouvoir être changée : il y a un tirage qui permet de le faire. En second lieu, il faut que l'ensemble de la loupe, du diaphragme et des fils puisse être, à chaque observation, amené sur l'image $A'B'$, qui varie avec la distance PC de l'objet visé ; il faut donc un second tirage indépendant du premier et qui commande l'oculaire et le réticule.

ANNEAU OCULAIRE. — Tous les rayons que reçoit la lunette peuvent être considérés comme partant de l'objectif, et cet objectif peut être assimilé à un objet lumineux ; soit R son rayon. Il donnera derrière l'oculaire une image de rayon r . Cette image sera un cercle plus petit que l'oculaire, une espèce d'anneau minimum à travers lequel viennent passer tous les rayons qui sont entrés par l'objectif et sont sortis par l'oculaire, parmi lesquels sont tous ceux qui ont été envoyés dans la lunette par les points contenus dans le champ de vision. C'est dans cet anneau qu'il faut mettre l'œil pour recevoir le plus de lumière possible : c'est l'*anneau oculaire*.

On calcule sa distance x à l'oculaire par la formule des lentilles, en remplaçant p par la longueur L de l'instrument : f désigne la valeur absolue de la distance focale de l'oculaire.

$$\frac{1}{x} = - \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{L} \right) = - \frac{L-f}{Lf}.$$

Le signe $-$ indique que l'anneau oculaire est placé en arrière de l'oculaire, c'est-à-dire en dehors de la lunette.

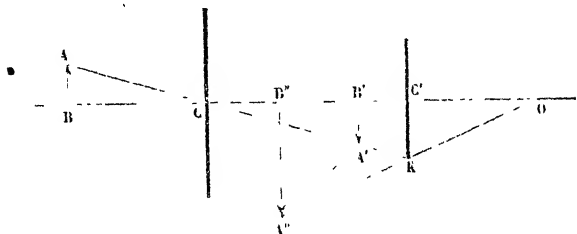
Le rapport $\frac{r}{R}$ de son rayon à celui de l'objectif sera égal à

$$\frac{r}{R} = \frac{-x}{L} = \frac{f}{L-f}.$$

GROSSISSEMENT. — Pour observer dans la lunette, on place l'œil dans le plan de l'anneau oculaire, en O (fig. 99). L'objet que l'on verrait à l'œil nu sous l'angle $ACB = KCC'$ est vu sous

l'angle $\angle A''OB'' = \angle KOC'$. Le rapport $\frac{KOC'}{KCC'}$ du diamètre apparent vu, dans la lunette, au diamètre apparent direct, se nomme le *grossissement*. Soit L la longueur CC' de la lunette; on ob-

Fig. 91



serve que les angles $\angle KCC'$, $\angle KOC'$ sont toujours assez petits pour qu'on puisse les confondre avec leur tangente. On a donc

$$(1) \quad G = \frac{KOC'}{KCC'} = \frac{\frac{KC'}{C'O}}{\frac{KC'}{CC'}} = \frac{L}{fL} = \frac{L}{f};$$

donc

$$G = \frac{R}{f}.$$

Le grossissement est égal au rapport du rayon de l'objectif à celui de l'anneau oculaire. Si la longueur L de la lunette est supposée invariable, cette expression est une quantité constante, c'est-à-dire que le grossissement est indépendant de la distance de l'objet à la lunette.

Remarquons toutefois que, dans la pratique, la longueur de la lunette ne demeure pas invariable, puisque l'observateur met au point l'oculaire, de manière que la distance OB'' de l'image à l'œil soit égale à la distance minimum de la vision distincte. Alors l'expression (1) n'est pas rigoureusement invariable. Cependant, dès que l'objet AB est suffisamment éloigné de la lentille objective pour que son image se forme sensiblement à son foyer, on peut considérer G comme fixe. On le détermine comme il suit.

On braque la lunette sur le ciel et l'on place devant l'oculaire un micromètre divisé sur verre, qu'on observe avec une loupe. Il reçoit toute la lumière qui sort de la lunette et qui trace sur le micromètre un cercle d'illumination dont on observe le diamètre. On cherche la position pour laquelle ce diamètre est minimum : c'est celui de l'anneau oculaire ; on le mesure, et alors le rapport de R à r est le grossissement. Pour obtenir la valeur exacte du rayon *utile* R de l'objectif, on déplace sur le verre les deux pointes d'un compas, jusqu'à ce que les pointes occupent sur l'anneau oculaire que l'on vise les deux extrémités d'un diamètre. L'écartement des branches du compas est alors égal à $2R$. Cette méthode est due à Ramsden.

CLARTÉ. — On peut se demander si les objets perdent ou gagnent de l'éclat quand on les regarde avec une lunette. Soient E , S et d l'éclat, la surface et la distance d'un objet ; $\frac{ES}{d^2}$ est la lumière qu'il envoie sur l'unité de sa surface, et $\pi \frac{ES}{d^2} p^2$ celle que reçoit la pupille si son rayon est p :

$$L = \pi \frac{ES}{d^2} p^2.$$

La lunette reçoit, de ce même objet, à travers la surface πR^2 de son objectif, une quantité de lumière L' :

$$L' = \pi \frac{ES}{d^2} R^2.$$

L' est évidemment plus grand que L .

En général, la pupille est plus petite que l'anneau oculaire ; elle ne recevra pas la totalité de cette lumière L' , mais seulement une fraction égale à $L' \frac{p^2}{r^2}$ ou

$$L'' = \pi E \frac{SR^2}{d^2 r^2} p^2.$$

Mais, d'autre part, la surface apparente de l'objet croît pro-

portionnellement au carré du grossissement linéaire; elle était $\frac{S}{d^2}$, elle devient $\frac{SR^2}{d^2 r^2} = \frac{S'}{d^2}$. On peut écrire la formule précédente

$$L'' = \pi \frac{ES'}{d^2} p^2,$$

ce qui exprime la quantité de lumière envoyée dans la pupille par la surface agrandie S' qu'on voit dans la lunette. Son éclat est égal à E ; il n'a donc point changé quand l'anneau oculaire est plus grand que la pupille.

S'il est plus petit, c'est-à-dire dans le cas de très forts grossissements, la totalité de lumière L' pénètre dans l'œil : on peut écrire

$$L' = \pi \frac{ES}{d^2} R^2 = \pi \left(\frac{Er^2}{p^2} \right) \left(\frac{SR^2}{d^2 r^2} \right) p^2 = \pi \left(\frac{Er^2}{p^2} \right) \frac{S'}{d^2} p^2.$$

C'est la quantité de lumière envoyée dans la pupille par la surface agrandie $S' = \frac{SR^2}{r^2}$; son éclat est $\frac{Er^2}{p^2}$; il a diminué dans le rapport de r^2 à p^2 . On voit comment le grossissement des lunettes est limité, puisque l'éclairement décroît aussitôt que l'anneau oculaire devient égal ou inférieur à la pupille. Cette limite est atteinte pour un grossissement linéaire de 16 fois si la pupille a 0^{cm},3 de diamètre et l'objectif 5^{mm}; il se recule à 30 fois si l'objectif a 10^{cm}, et, pour atteindre 300 fois, il faudrait 1^m de diamètre.

Pour un observateur dont la pupille a 0^{cm},2, les grossissements qu'on peut atteindre sans diminuer l'éclat sont égaux à 25, 50, 100, quand les diamètres de l'objectif sont de 5^{cm}, 10^{cm}, 20^{cm}.

Quand on dépasse cette limite, on voit diminuer progressivement l'éclat de tous les objets qui ont une étendue apparente. Mais, comme une étoile ne grossit point, le seul effet de la lunette est d'augmenter dans le rapport de R^2 à p^2 la proportion de la lumière envoyée à l'œil. D'autre part, l'éclat général du ciel décroît de p^2 à r^2 , et pour une double raison l'étoile paraît plus brillante. Conséquemment, il faut observer

avec des grossissements excessifs quand on veut découvrir des étoiles faibles, avec des grossissements modérés si l'on veut étudier les détails d'objets étendus qui ne sont pas à l'infini et qui sont peu éclairés.

LUNETTE ASTRONOMIQUE. — Les généralités qui précèdent s'appliquent à toute sorte de lunettes. Mais le détail des dispositions varie suivant l'objet spécial de l'instrument.

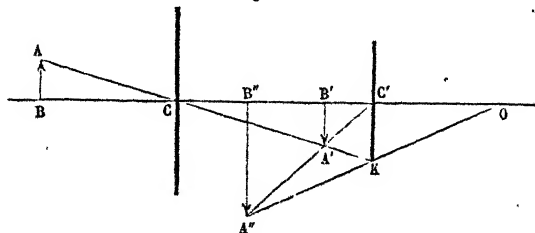
La lunette astronomique est destinée à viser les objets placés à une distance extrêmement grande. Les images se forment donc dans le plan focal principal de l'objectif. La distance de l'oculaire C' (fig. 100) à cette image est un peu plus petite que sa distance focale f , et la longueur L de la lunette est presque égale à la somme $F + f$.

Pour une vue infiniment presbyte, on aurait rigoureusement $L = F + f$. La lunette étant au point pour une vue de cette espèce, une vue normale ou myope devra légèrement rapprocher l'oculaire de l'objectif; une vue hypermétrope l'en éloignerait un peu. On convient de fixer les constantes de la lunette pour le cas d'une vue infiniment presbyte.

1^o *Grossissement* ⁽¹⁾. — Sa valeur est $\frac{F}{f}$. Pour une vue nor-

(1) Nous savons déjà que, pour toute lunette de longueur L constante, le

Fig. 101.



grossissement angulaire est invariable quelle que soit la distance de l'objet AB

male ou myope, le grossissement serait un peu plus faible; si l'on exclut le cas d'une vue hypermétrope, on voit que la valeur adoptée pour le grossissement sera maximum.

2° *Rayon de l'anneau oculaire.* — $r = \frac{f}{F} R$.

3° *Rayon du trou du diaphragme.* — Les triangles semblables DIC, EIC', KIF (fig. 100) donnent, en désignant par r' le rayon de l'oculaire, par ρ celui du diaphragme,

$$\rho = \frac{Fr' - fR}{F + f}.$$

4° *Champ.* — C'est l'angle KCF; sa valeur est

$$C = \frac{\rho}{F} = \frac{Fr' - fR}{F(F + f)}.$$

Il est à noter que, dans la lunette réglée pour un œil infiniment presbyte, tout faisceau de rayons parallèles qui tombent

(fig. 101) à l'objectif. On nomme *grossissement linéaire* le rapport $\frac{B''A''}{AB}$ des dimensions absolues de l'image et de l'objet. Quand on fait $L = F + f$, ce qui est le cas de la lunette astronomique, ce grossissement linéaire est aussi constant et a une valeur inverse du grossissement angulaire.

On a en effet (fig. 101)

$$\frac{A''B''}{AB} = \frac{A''B''}{A'B'} \frac{A'B'}{AB} = \frac{C'B''}{L - CB'} \frac{CB'}{CB},$$

$$\frac{1}{CB} + \frac{1}{CB'} = \frac{1}{F}, \quad \frac{1}{L - CB'} - \frac{1}{C'B'} = \frac{1}{f}.$$

Des deux dernières équations on tire

$$\frac{CB'}{CB} = \frac{CB' - F}{F},$$

$$\frac{C'B''}{L - CB'} = \frac{f}{f - L + CB'},$$

et, par suite,

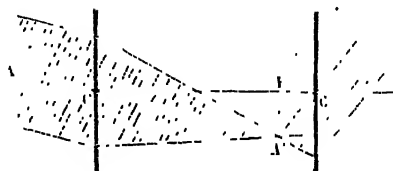
$$\frac{A''B''}{AB} = \frac{F}{f} \frac{CB' - F}{f - L + CB'},$$

qui se réduit, quand on pose $L = F + f$, à

$$\frac{A''B''}{AB} = \frac{f}{F}.$$

sur l'objectif donne au sortir de l'oculaire un faisceau de rayons parallèles, dans une direction différente (*fig. 102*).

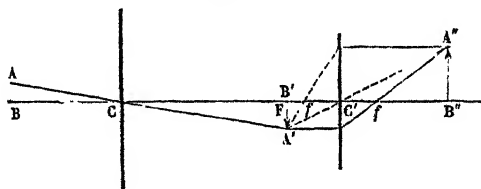
Fig. 102.



Cette propriété ne peut appartenir qu'à un système de lentilles, jamais à une lentille unique.

On emploie souvent aujourd'hui la lunette astronomique comme instrument de projection (*fig. 103*); pour cela, il suffit

Fig. 103.

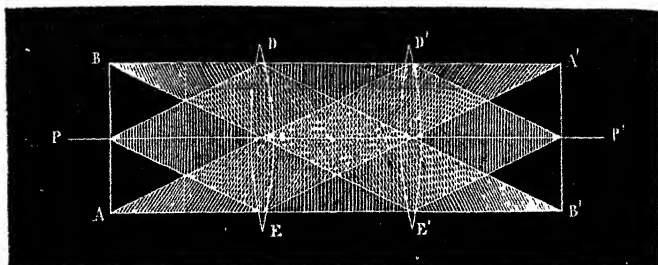


d'écarter l'oculaire de l'objectif de telle sorte que la distance des deux verres devienne supérieure à $F + f$. Les images obtenues sont redressées et agrandies par rapport à l'image focale. On emploie ces images réelles pour la photographie stellaire.

LUNETTE TERRESTRE. — Dans les lunettes ordinaires, les objets sont vus renversés, ce qui est sans importance pour les astres, mais non quand on observe sur la terre. Pour y remédier, on redresse les images au moyen de deux lentilles égales et parallèles, DE, D'E', qu'on interpose entre l'objectif et l'oculaire (*fig. 104*). BA est l'image renversée donnée par l'objectif; elle est au foyer de DE. Les rayons partis de P se transforment en un faisceau parallèle D'D'E'E', que la deuxième lentille concentre en un foyer P'. Du point B partent des rayons qui

deviennent parallèles à l'axe secondaire BC et se concentrent ensuite en un foyer B' sur l'axe B' C' parallèle à BC. On a donc

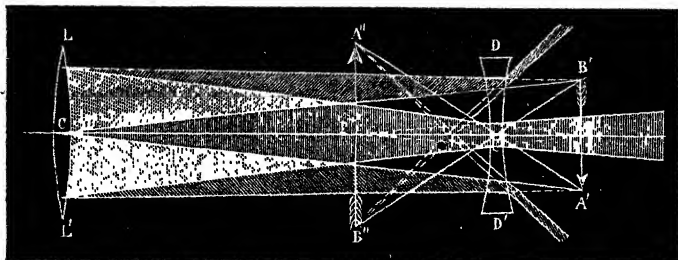
Fig. 104.



en A'B' une image égale à AB; mais elle est redressée : c'est celle qu'on observe avec une loupe.

LUNETTE DE GALILÉE. — L'oculaire de la lunette de Galilée ⁽¹⁾ donne directement des images droites; il est formé par une lentille biconcave DD' (fig. 105) placée en avant de l'image

Fig. 105.



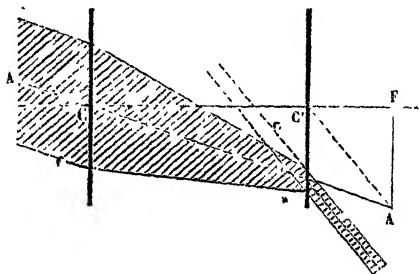
renversée A'B' que formerait l'objectif LL', et de telle sorte que son foyer virtuel soit un peu en dedans de A'B'. Les rayons dirigés vers P' divergent après leur passage à travers

(¹) GALILÉE, *Nuntius sidereus*; Florent., 1610, p. 4-11. Galilée savait qu'on avait construit en Hollande des lunettes rapprochant les objets. (Voir, sur le véritable inventeur de la lunette, GENLER, *Physikalisches Wörterbuch*, t. IV, p. 141, article *Fernrohr*.)

DD' comme s'ils partaient de P". Ceux qui aboutissaient en A' divergeront de même, comme s'ils venaient de A", situé sur l'axe A'C'. Finalement il n'y a point d'image réelle, mais il y en a une en A''B'', qui est virtuelle, redressée et agrandie. En plaçant convenablement DD', elle se forme à la distance de la vision distincte.

Supposons la lunette réglée pour une vue infiniment presbyte; alors le foyer F de l'objectif et le foyer virtuel de l'oculaire doivent coïncider, et les rayons entrés parallèlement dans la lunette en sortent parallèlement (fig. 106). Si l'on suppose

Fig. 106.



l'œil placé au centre optique de l'oculaire, le grossissement est (fig. 105) le rapport de l'angle A'C'B' à A'CB'

$$G = \frac{F}{f}.$$

Cette expression du grossissement est un maximum pour les vues normales ou myopes, lesquelles, pour rapprocher l'image A''B'' à la distance minimum de leur vision distincte, devront ramener le foyer f en dedans de A'B', ce qui augmente le dénominateur de G sans changer le numérateur.

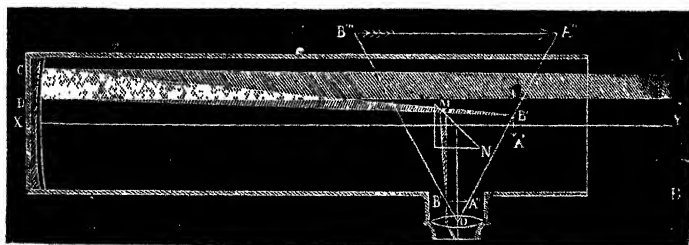
Notons que, l'image de l'objectif dans l'oculaire étant virtuelle, il n'y a pas, à proprement parler, d'anneau oculaire dans la lunette de Galilée; on ne peut y introduire de diaphragme, ni de réticule, de sorte que son axe optique est indéterminé. Ces inconvénients ne sont pas suffisamment rachetés par la moindre longueur de la lunette. Aussi cet

appareil n'est-il employé que pour de faibles grossissements et comme lorgnette de spectacle. Dans ce dernier cas, deux lunettes de Galilée sont disposées sur une monture commune, de manière à permettre la vision binoculaire. Le tirage s'exécute au moyen d'une vis portant les tubes des oculaires et d'un écrou monté sollement sur l'axe qui porte les objectifs.

TÉLESCOPES.

TÉLESCOPE DE NEWTON. — Les télescopes sont des lunettes dans lesquelles on remplace l'objectif par un grand miroir concave. Soient AB un objet situé au loin, CD le miroir, A'B' l'image renversée qu'il fournit (*fig.* 107). Herschel ⁽¹⁾ diri-

Fig. 107.



geait l'appareil de façon que cette image se fît sur le bord du tube au fond duquel était le miroir, et il l'observait directement avec une loupe. Newton ⁽²⁾ plaçait en MN, avant l'image, un miroir vertical incliné à 45° sur la direction de l'axe XY, et il obtenait ainsi une image A''B'' qu'il examinait avec l'oculaire O, fixé sur un tube de tirage horizontal.

Tout ce que nous avons dit du grossissement, du champ, de la clarté, de l'anneau oculaire et de la mise au point dans les

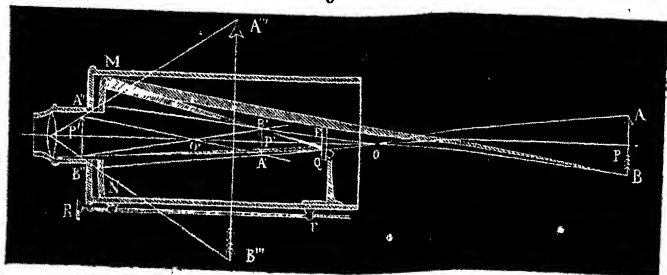
⁽¹⁾ HERSCHEL, *Description of a forty feet reflecting telescope* (*Philosoph. Transact.*, 1795, p. 347); *Experiments for ascertaining how far a telescope will enable us to determine very small angles and to distinguish the real from the specious diameter of celestial and terrestrial objects* (*Philosoph. Trans.*, p. 31; 1805).

⁽²⁾ NEWTON, *An account of a new catadioptrical telescope* (*Philosoph. Trans.*, 1669, p. 4004 et 4009; 1672, p. 4032 et 4034).

lunettes, est applicable sans aucun changement à ces télescopes. Il est inutile d'y revenir.

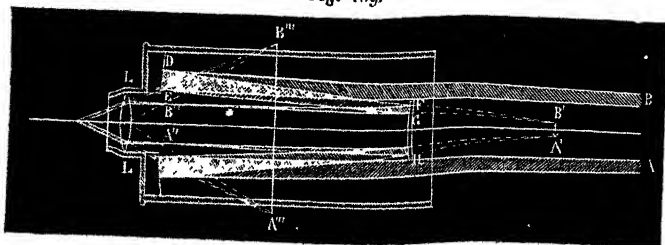
TÉLESCOPE DE GREGORY ET DE CASSEGRAIN. — Grégory ⁽¹⁾, l'inventeur du télescope, avait disposé l'appareil d'une manière plus compliquée. Il imagina de percer d'un trou le centre du miroir et de recevoir les rayons issus de l'image $A'B'$ sur un second miroir concave PQ , très petit, dont le centre est en O' ,

Fig. 108.



ce qui donne une seconde image $A''B''$ agrandie, doublement renversée, et par conséquent droite, au foyer conjugué de $A'B'$. Cette image change de place en même temps que le miroir PQ ,

Fig. 109.



et celui-ci est mobile par une vis de rappel Rr . L'oculaire est fixe devant $A''B''$ (fig. 108).

Cassegrain ⁽²⁾ remplaça le miroir concave par un miroir convexe FH placé avant l'image $A'B'$, ce qui diminue la

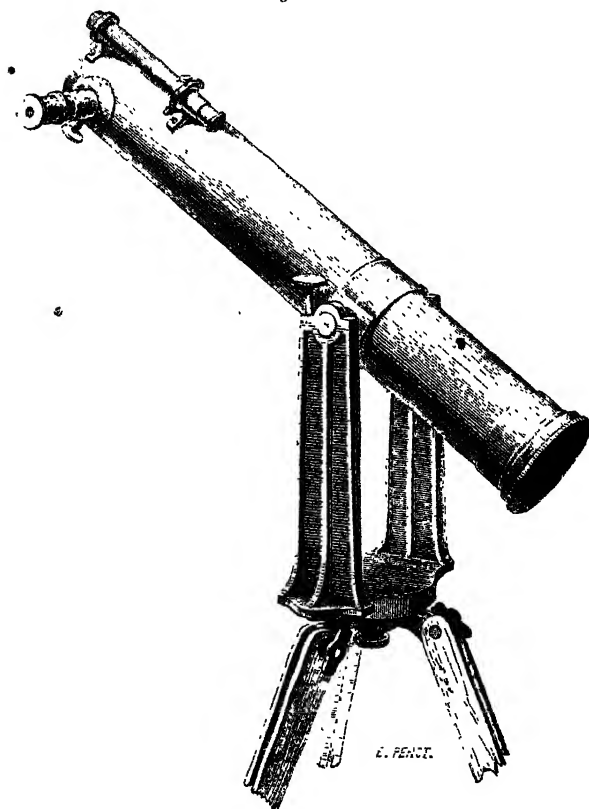
⁽¹⁾ J. GREGORY, *Optica promota seu abdita radiorum reflectorum et refractorum mysteria geometricè enucleata*; London, 1663, Gregory.

⁽²⁾ NEWTON, *Considerations concerning the catadioptrical telescope pretended*

longueur de l'appareil et forme une image agrandie $A''B''$ (fig. 109).

TÉLESCOPE DE FOUCAULT. — L'avantage spécial des télescopes consiste dans la propriété qu'ont les miroirs de produire des

Fig. 110.



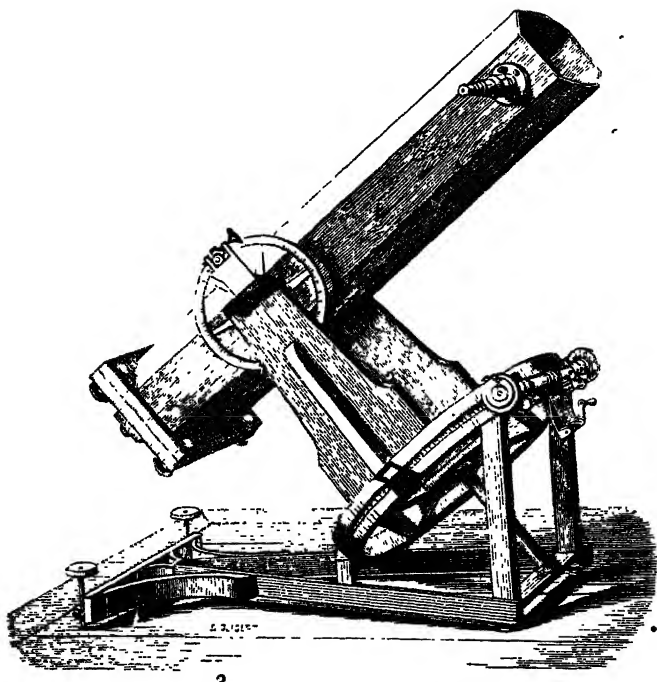
images absolument achromatiques, et, comme il est aisé de leur donner de grandes dimensions, on peut leur imposer des

to be improved and refined; by M. Cassegrain (Philosoph. Trans., 1672, p. 4056).

Dans un télescope de Gregory ou de Cassegrain réglé pour une vue infiniment presbyte, on a toujours $\overline{OP'} = F$, et la distance de $A''B''$ à l'oculaire est

grossissements considérables. Foucault ⁽¹⁾ a réalisé des perfectionnements remarquables en fabriquant des miroirs de

Fig. III.



verre dont il retouchait la surface jusqu'à l'amener à la forme

égale à la distance focale. Le grossissement angulaire

$$G = \frac{F}{f} \times \frac{O'P'}{OP}.$$

Ce grossissement est donc égal à celui d'un télescope de Newton qui aurait même objectif et même oculaire, multiplié par l'amplification produite par le petit miroir. Mais ce qu'on gagne en grossissement, on le perd en clarté, puisque la quantité de rayons reçus par l'œil n'est pas augmentée par l'adjonction du petit miroir. Il en résulte que l'avantage de cette disposition est absolument nul pour les objets sans diamètre apparent.

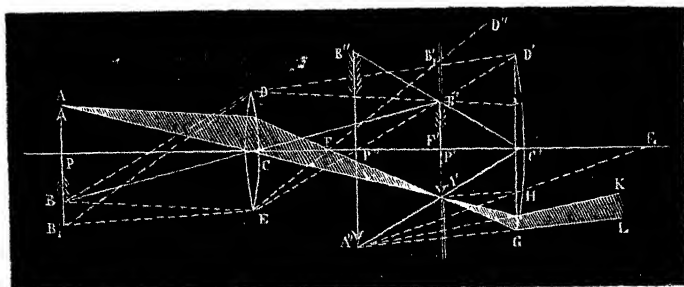
(1) FOUCAULT, *Télescope en verre argenté* (*Comptes rendus*, t. XLIV, p. 339 ; t. XLVII, p. 295 et 958 ; t. XLIX, p. 85, et t. LIV, p. 1 ; *Annales de l'Observatoire*, t. V, p. 197.)

paraboloïdale, comme nous l'avons indiqué précédemment. Il les argentait ensuite pour leur donner un plus grand pouvoir réflecteur, et les disposait à la manière de Newton. Les images sont reçues sur un prisme à réflexion totale et observées avec des microscopes. On voit (*fig. 110*) la disposition que M. Secretan a donnée aux télescopes destinés à examiner les objets terrestres. La *fig. 111* montre comment on les monte sur un équipage parallactique.

MICROSCOPE.

CONDITIONS PHYSIQUES. — Les lunettes étant destinées à observer des objets inaccessibles, l'image $A'B'$ (*fig. 112*) se for-

Fig. 112.



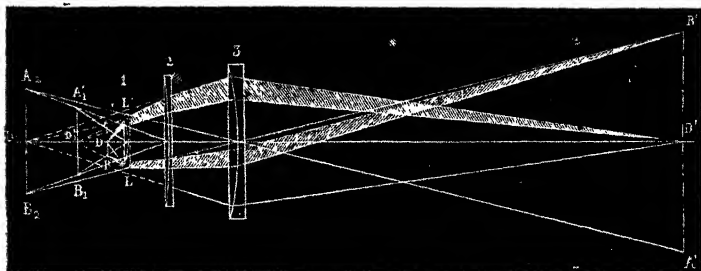
maît en des endroits variables avec les distances de ces objets et il fallait que la loupe oculaire fût portée par un tuyau de tirage. Le microscope est dans les conditions opposées; on peut toujours approcher l'instrument des objets qu'on veut étudier et régler sa distance, de telle sorte que l'image de AB se fasse en $A'B'$ dans le plan focal où il faut qu'elle soit, pour être vue nettement par l'observateur, quelle que soit sa distance de vision distincte. Il n'y a donc pas besoin de tirage : aussi le microscope est-il un appareil dont les verres sont fixes, mais dont la distance aux objets est variable.

La longueur de l'instrument peut être quelconque; plus elle sera grande, plus l'image $A'B'$ sera éloignée de AB , et plus le grossissement sera fort. Il n'est pas commode cependant d'augmenter outre mesure cette longueur : on va le com-

prendre. A mesure que l'objet s'approche du foyer principal de l'objectif DE, l'image A'B' s'éloigne, d'abord lentement, ensuite très rapidement jusqu'à l'infini, de façon que les moindres différences dans la distance de l'objet AB déterminent des changements de place énormes de l'image A'B'; or, comme les objets qu'on regarde ont toujours une épaisseur, bien qu'elle soit petite, on ne verrait distinctement à la fois que les points situés rigoureusement dans une section plane AB. Il vaut donc mieux réduire la longueur de l'appareil et augmenter la puissance de l'objectif.

Cet objectif est composé de deux ou trois lentilles achromatiques très petites, superposées et séparées par des distances réglées expérimentalement (fig. 113). La première LL' (n° 1)

Fig. 113.



reçoit les rayons de l'objet placé en AB, diminue leur divergence, forme en P_1 un foyer virtuel de D et en $A_1 B_1$ l'image de AB. La deuxième (n° 2) continue cet effet et forme l'image en $A_2 B_2$; la troisième enfin (n° 3) produit une dernière image A'B' qui est réelle, renversée et en face de l'oculaire. Le grossissement de A'B' sera d'autant plus grand que la distance de D à LL' sera plus petite, qu'on aura mis un plus grand nombre de lentilles et qu'elles seront plus fortes. La pratique seule indique aux constructeurs ⁽¹⁾ les conditions de courbure et de distance qu'ils doivent donner aux trois

(1) Quand un objectif de microscope est constitué, on peut toujours lui substituer, pour le calcul du grossissement, une lentille épaisse unique dont les plans principaux et la distance focale principale sont déterminés comme nous le verrons dans la suite.

lentilles. En général, tout microscope est accompagné de plusieurs systèmes d'objectifs numérotés d'après leur degré de puissance. On a représenté (*fig. 113*) la marche des rayons partant du milieu D et d'un point B de l'objet.

L'angle LDL' que font les rayons extrêmes en arrivant sur la lentille se nomme l'*angle d'ouverture* de l'instrument. Plus il est grand, plus l'instrument reçoit de lumière de chaque point D. Il est important qu'il en reçoive beaucoup pour que l'image A' B' soit vive; mais, pour que les rayons extrêmes DL et DL' fassent leurs foyers au même point que les rayons centraux, il faut que les lentilles soient rigoureusement exemptes d'aberration de sphéricité, condition très difficile à remplir.

Pour diminuer cette aberration, Amici a imaginé d'immerger la première lentille LL' dans un liquide. On couvre l'objet qu'on veut examiner d'un verre mince; on en approche la lentille LL' et entre ce verre et cette lentille on met une goutte d'eau distillée. De cette façon, le cône des rayons LDL' est très peu dévié à travers la première lentille, le premier foyer D, est tout près de D, l'aberration est très faible et le microscope supporte un angle d'ouverture considérable.

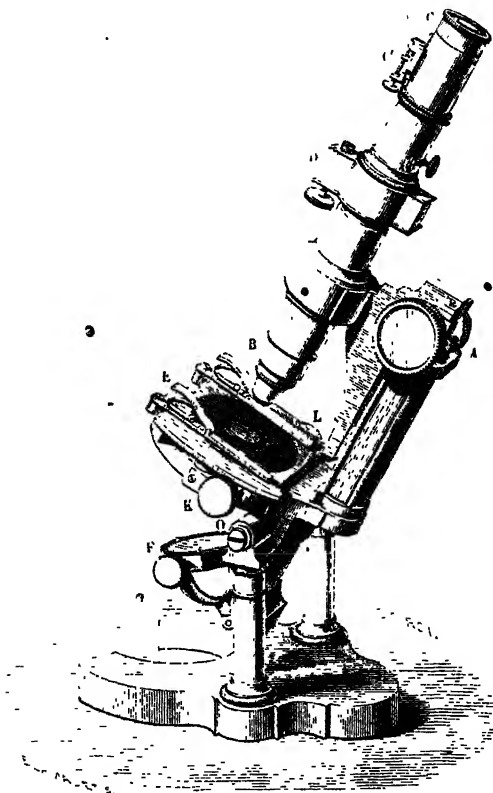
M. Nacet joint à ses objectifs une lentille dite de correction. Comme les diverses pièces de cet objectif doivent être réglées par la pratique, de manière à donner le meilleur effet, une des lentilles est portée sur un tube de longueur variable qui permet de l'éloigner ou de la rapprocher à volonté. Il faut, par exemple, la mettre en des points différents suivant que l'objet observé est ou n'est pas couvert d'un verre, ou bien suivant que l'épaisseur de ce verre change. L'observateur a la faculté de chercher la meilleure combinaison de distance.

Quant à l'oculaire, c'est invariablement le système négatif d'Huygens; on fera bientôt connaître sa construction et les conditions de son achromatisme.

CONDITIONS MÉCANIQUES. — La forme et la disposition des microscopes varient suivant les temps, les pays et les constructeurs; nous représentons (*fig. 115*) l'un des plus parfaits, celui de M. Nacet. Le corps de l'instrument est en BC; il se meut du haut en bas dans une coulisse qu'on fait marcher par

une crémaillère et un pignon A. Le porte-objet est en E; il est fixe. Comme il arrive souvent que, pendant les observations, l'objectif B rencontre le porte-objet et le brise, on l'a fixé à l'extrémité d'un tube rentrant, à ressort; par ce moyen il re-

Fig. 114.

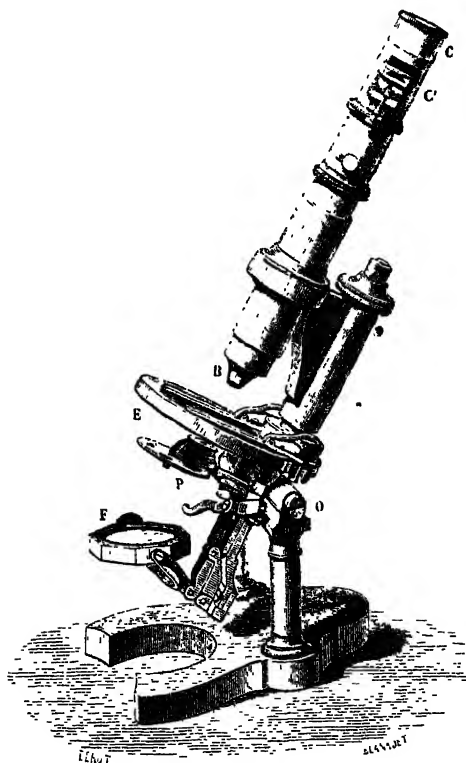


monte dans le corps du microscope, quand on vient par mégarde à trop l'abaisser.

Le pignon A donne à l'appareil un mouvement rapide; pour achever la mise au point, une vis D, à pas très serré, fait marcher l'oculaire très lentement jusqu'à ce qu'on voie distinctement l'image.

Les objets sont placés sur la plate-forme E, entre deux verres que maintiennent, par une légère pression, deux règles à ressort. Les vis K et L transportent lentement la plate-forme dans deux sens rectangulaires, afin d'amener l'objet dans le champ de l'oculaire.

Fig. 115.

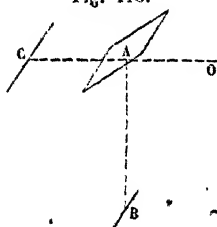


L'éclaircissement de cet objet est l'une des conditions essentielles du microscope. On l'obtient par un miroir concave F, qui est mobile dans tous les sens, sur lequel on reçoit la lumière des nuées ou d'une lampe ou d'un verre dépoli fortement illuminé, et qui la concentre, suivant l'axe de l'instrument, sur les objets qu'on veut observer. Comme ceux-ci sont toujours très minces, ils sont presque transparents, et chaque

détail de leur organisation intérieure transmet cette lumière comme s'il était lumineux lui-même. Au-dessous du porte-objet se voit (*fig. 115*) un diaphragme P qui permet de faire varier la quantité de lumière. Souvent on la concentre par des systèmes de lentilles, comme dans le microscope solaire. Enfin l'appareil s'incline autour d'un axe horizontal O, et l'observateur, suivant sa commodité, lui donne la direction qu'il veut.

GROSSISSEMENT. — On ne peut plus mesurer le grossissement

Fig. 116.



du microscope comme on le fait pour les lunettes. On se sert de la chambre claire. Soit AB l'axe de l'instrument supposé vertical (*fig. 116*). En A est une glace réfléchissante percée d'un trou très petit. Par ce trou l'œil voit l'image d'une règle divisée C, et par les bords celle d'un micromètre divisé en centièmes de millimètre, qui est sur le porte-objet et qui

est grossi par l'instrument. Ces images paraissent confondues.

En cherchant les traits qui coïncident, on observe que m centièmes de millimètre de B, grossis G fois par l'instrument, occupent l'étendue de n millimètres de la règle C.

$$\frac{m}{100} G = n, \quad G = \frac{100n}{m}.$$

On peut donc calculer le grossissement linéaire G .

On voit au sommet de l'instrument, au-dessous de l'oculaire (*fig. 114* et *115*), en C, un appareil muni d'une vis micrométrique. Il permet d'introduire au foyer de l'oculaire un micromètre divisé sur verre en centièmes de millimètre, qu'on règle par la vis jusqu'à en voir distinctement les traits. On place en E sur le porte-objet un micromètre pareil dont l'image, grossie G' fois par l'objectif, coïncide avec celui qui est en C'. On trouve que m' divisions grossies du second occupent n' divisions du premier

$$m' G' = n', \quad G' = \frac{n'}{m'}.$$

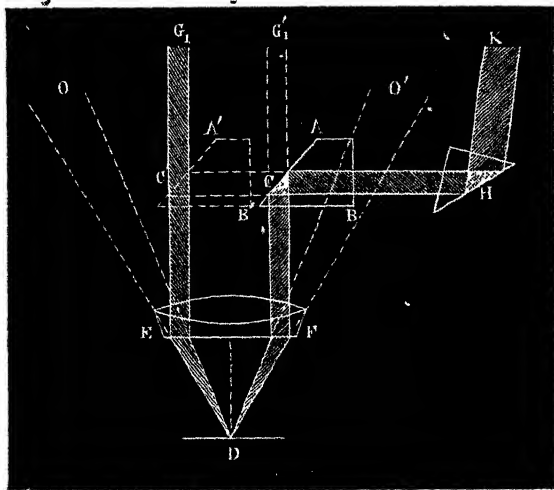
Cela fait connaître, pour un instrument donné, le grossisse-

ment de l'objectif; c'est tout ce qu'il est utile de connaître. En effet, on aura le grossissement total G en multipliant G' par le grossissement de l'oculaire. En second lieu, si l'on veut avoir la grandeur d'un objet, on le met sur le porte-objet et on le compare au micromètre C' . S'il occupe n' divisions, sa grandeur réelle m' est $\frac{n'}{G'}$.

C'est par ce procédé qu'on trouve, par exemple, le diamètre des globules du sang. Il y a encore une autre méthode qui consiste à placer ces globules en E (*fig. 115*) sur le micromètre même du porte-objet, et à voir combien elles couvrent de divisions de cet étalon.

MICROSCOPE BINOCULAIRE. — On verra dans une autre partie de cet Ouvrage que le concours des deux yeux est nécessaire pour

Fig. 117.



produire la sensation du relief. Or, dans le microscope, l'observation est monoculaire et il y a de fréquentes illusions sur la forme. M. Nachet a réalisé très simplement un instrument qui montre les objets aux deux yeux, comme si, étant grossis par l'appareil, on les voyait avec les deux yeux à la distance de la vision distincte (*fig. 117*).

Soient D un point de l'objet, O, O' les deux yeux; O le verra suivant le cône DO , O' suivant DO' ; il faut faire en sorte que, par l'intermédiaire du microscope, O et O' reçoivent encore les mêmes faisceaux sous les mêmes angles, de façon que les conditions de vision restent les mêmes et qu'il n'y ait que le gros-

Fig. 118.

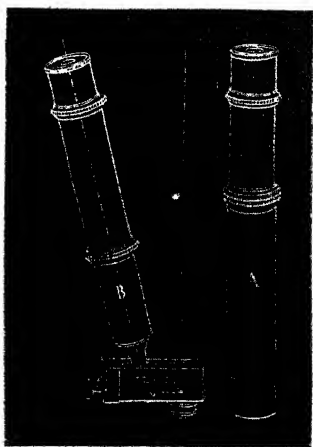
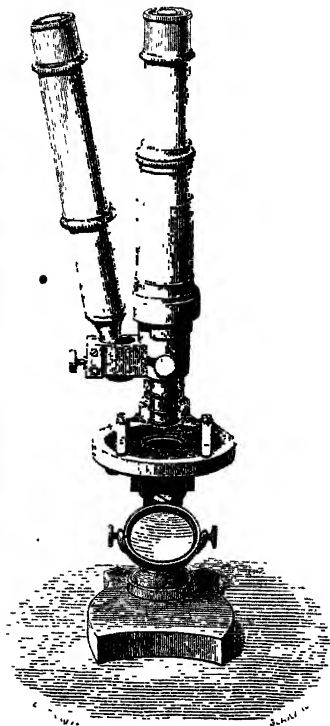


Fig. 119.



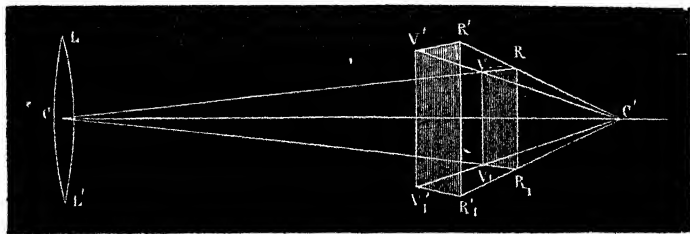
sissement de plus. Partis de D , les rayons traversent l'objectif EF qui les transforme en deux faisceaux presque parallèles, puisqu'ils vont concourir à former l'image de D en avant de l'oculaire. On reçoit les rayons EG , dans un premier tube qui les apporte à l'œil O armé d'un oculaire; les autres rayons FG' , se réfléchissent en C et en H dans deux prismes, et pénètrent dans un deuxième tube HK et dans un deuxième oculaire pour

arriver ensuite à l'œil O' . Ces deux tubes ont un angle égal à celui des axes optiques des deux yeux regardant à la distance de la vision distincte, c'est-à-dire un angle égal à ODO' , et en résumé les deux yeux voient l'objet D grossi, mais sous les mêmes perspectives que s'ils le voyaient en réalité sans microscope. La sensation des reliefs et des creux est alors saisissante. En transportant le prisme AB en $A'B'$, le faisceau EG_1 est reçu par l'œil O , et le faisceau EG_1 , réfléchi deux fois, pénètre dans l'œil O' . La perspective des deux yeux est retournée et les conditions de relief renversées; on a une vue pseudoscopique de l'objet. On voit (*fig. 119*) l'apparence extérieure de l'appareil.

ACHROMATISME.

S'ils étaient construits comme nous venons de le dire, les instruments dioptriques composés donneraient des images irisées. Tout objet blanc rayonne en effet les diverses couleurs superposées vers l'objectif LL' (*fig. 120*) et celui-ci forme au-

Fig. 120.



tant d'images distinctes RR_1, \dots, VV_1 , qu'il y a de lumières simples. Celle du rouge, qui est la moins réfrangible, est la plus éloignée en RR_1 ; le violet fait la sienne en VV_1 , et les couleurs intermédiaires, entre VV_1 et RR_1 . La loupe oculaire placée en C' fera voir ensuite en $R'R'_1$ l'image virtuelle agrandie de RR_1 , et en $V'V'_1$ celle de VV_1 . En résumé, tout point de l'objet se verra suivant un spectre $R'V'$, d'autant plus étalé qu'il sera plus éloigné de l'axe. L'image générale manquera de netteté, et partout où il y aura des variations d'intensité, il y

aura des couleurs. On remédie à ces graves inconvénients de deux manières : 1° en construisant des objectifs achromatiques, lesquels donnent sensiblement dans le même plan focal les images RR_1 , VV_1 du rouge et du violet; 2° en corrigeant par des oculaires composés la petite dispersion que laissent subsister ces objectifs. Nous allons nous occuper de ces objectifs et de ces oculaires; mais auparavant nous commencerons par comparer les diverses substances réfringentes sous le rapport de la faculté qu'elles possèdent de disperser les diverses couleurs simples.

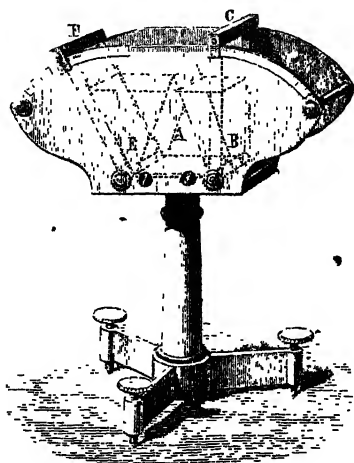
POUVOIR DISPERSIF. — Dans l'effet d'un prisme il y a deux choses à considérer : 1° la déviation moyenne δ , du rayon jaune; 2° l'angle $\delta_7 - \delta$, que font les rayons extrêmes rouge et violet, et que l'on nomme *angle de dispersion*. Si l'on construit plusieurs prismes avec une même substance, la déviation moyenne et la dispersion sont toujours proportionnelles. Il n'en est point ainsi quand on change la matière réfringente. On peut tailler deux prismes de flint et de crown, sous des angles A et A' tels, ou bien qu'ils produisent une même déviation moyenne δ , et une dispersion $\delta_7 - \delta$, très inégale, ou bien une dispersion égale et une déviation différente. Si l'on superpose ces prismes en sens opposé, l'effet total est la différence des actions individuelles, et il arrive, dans le premier cas, que le faisceau n'est plus dévié et reste coloré dans le sens du prisme de flint; dans le second, que le faisceau est dévié dans le sens déterminé par le crown, mais qu'il n'est plus coloré. Il est achromatisé.

On fait ordinairement l'expérience avec le prisme à liquide (*fig. 121*), composé de deux faces latérales parallèles et bien dressées, entre lesquelles s'inclinent à frottement deux parois de glace EF , BC . L'angle de ces faces a son sommet vers le bas; il est mesuré par une graduation que F et C parcourent. On place entre elles un deuxième prisme A dirigé dans un sens contraire, taillé dans du flint; on remplit l'intervalle avec de l'eau ou avec tout autre liquide; on reçoit sur l'appareil un faisceau solaire très mince, et il est facile de trouver par tâtonnement deux situations de la lame EF , l'une pour laquelle la

dispersion est détruite sans que la déviation le soit, l'autre qui donne un rayon dispersé, mais non dévié.

Cela prouve que, toutes choses égales d'ailleurs, la dispersion suit des lois spéciales et qu'il y a lieu de la comparer dans les diverses substances. On nomme *pouvoir dispersif* le rapport de l'angle $\delta_7 - \delta_1$, que font les rayons extrêmes à la dévia-

Fig. 121.



tion δ_1 du rayon moyen jaune. Ainsi défini, ce rapport serait variable avec l'angle réfringent du prisme; mais, comme il varie peu, on peut le regarder comme sensiblement constant. Voici un tableau dressé par Brewster (1) : il faut le considérer comme une simple approximation, destinée à mettre en lumière le fait qui nous occupe.

	$\frac{\delta_7 - \delta_1}{\delta_4}$
Chromate de plomb.....	0,400
Réalgar fondu.....	0,267
Huile de cassia.....	0,139
Soufre, phosphore.....	0,130

(1) BREWSTER, *Treatise on new philosophical instruments*, p. 315, et *Treatise on Optics*, p. 372. Londres, 1831.

	$\frac{\partial r - \partial i}{\partial \lambda}$
Sulfure de carbone	0,115
Huile de girofle	0,062
Flint-glass	0,052
Flint-glass	0,048
Huile de lavande	0,045
Baume du Canada	0,045
Spath (rayon ordinaire) ...	0,040
Diamant	0,038
Alun	0,036
Crown	0,036
Eau	0,035
Crown	0,033
Verres à vitres	0,032
Alcool	0,029
Cristal de roche	0,026
Spath fluor	0,022

Ainsi qu'un prisme, toute lentille produit un double effet : une déviation moyenne et une dispersion des rayons extrêmes, et, d'après ce que nous venons de dire, il est évident qu'en accolant deux lentilles de substances différentes, l'une convergente de crown, l'autre divergente de flint, il sera possible, en leur donnant des courbures convenables, de détruire la dispersion des rayons extrêmes, tout en laissant subsister la convergence du faisceau. C'est en cela que consiste le problème de l'achromatisme des lentilles.

ACHROMATISME DES LENTILLES. — Soient r, r' les valeurs absolues des rayons de courbure de la lentille convexe de crown ; n_1, n_2, \dots, n_7 les indices de réfraction du rouge, de l'orangé, ..., du violet dans ce milieu. Soient de même r', r'' , n'_1, n'_2, \dots, n'_7 les rayons de courbure et les indices de la lentille biconcave de flint.

Si l'on fait tomber sur le système un rayon rouge parallèle à l'axe, le foyer sera à une distance p_1 , donnée en valeur absolue par la formule suivante :

$$\frac{1}{p_1} = (n_1 - 1) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) - (n'_1 - 1) \left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} \right).$$

Pour un rayon violet, il sera à une distance p_7 qu'on trouvera en remplaçant n_1 et n'_1 par n_7 et n'_7 :

$$\frac{1}{p_7} = (n_7 - 1) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) - (n'_7 - 1) \left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} \right).$$

Pour que la lentille soit achromatique, il faut et il suffit que p_1 soit égal à p_7 ou que

$$\begin{aligned} & (n_1 - 1) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) - (n'_1 - 1) \left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} \right) \\ &= (n_7 - 1) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) - (n'_7 - 1) \left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} \right), \end{aligned}$$

ce qui se réduit à

$$(1) \quad \frac{n_7 - n_1}{n'_7 - n'_1} = \frac{\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}}.$$

Le foyer des rayons rouges coïncidera avec celui des rayons violets si, r, r' étant donnés, on calcule r'' par cette relation. On pourra de même superposer le jaune et le bleu, ou en général le foyer d'une raie α avec celui d'une autre raie β . Il suffira de prendre les indices correspondants et de calculer le rapport $\frac{n_\beta - n_\alpha}{n'_\beta - n'_\alpha}$. C'est ce que fit Fraunhofer pour un assez grand nombre de substances. Voici les valeurs des indices :

*Tableau des indices de réfraction des divers rayons du spectre
d'après les expériences de Fraunhofer (¹).*

SUBSTANCES LEFRINGENTES	B, n_1 .	C, n_2 .	D, n_3 .	E, n_4 .	F, n_5 .	G, n_6 .	H, n_7 .
Flint-glass n° 13.	1,627749	1,629681	1,635036	1,642024	1,648260	1,660285	1,671062
Crown-glass.....	1,525832	1,526849	1,529587	1,533005	1,536052	1,541657	1,546566
Eau.....	1,330935	1,331712	1,333577	1,335851	1,337818	1,341293	1,344177
Flint-glass n° 3..	1,602042	1,603800	1,608494	1,614532	1,620042	1,630772	1,640373
Flint-glass n° 30.	1,623570	1,625477	1,630585	1,637356	1,643466	1,655406	1,666072
Crown-glass n° 13.	1,524312	1,525299	1,527982	1,531372	1,534337	1,579908	1,544684
Flint-glass n° 23 et prisme de 60°.	1,626596	1,628451	1,633667	1,640495	1,646756	1,658848	1,669986

Voici maintenant les valeurs du rapport $\frac{n_\beta - n_\alpha}{n'_\beta - n'_\alpha}$:

*Tableau de dispersion partielle de plusieurs substances
prises deux à deux.*

SUBSTANCES LEFRINGENTES.	$\frac{n_1 - n_2}{n'_1 - n'_2}$	$\frac{n_1 - n_3}{n'_1 - n'_3}$	$\frac{n_2 - n_3}{n'_2 - n'_3}$	$\frac{n_1 - n_4}{n'_1 - n'_4}$	$\frac{n_2 - n_4}{n'_2 - n'_4}$	$\frac{n_3 - n_4}{n'_3 - n'_4}$
Flint-glass n° 13 et eau.	2,562	2,871	3,073	3,193	3,460	3,726
Flint-glass n° 13 et crown-glass n° 9....	1,900	1,956	2,044	2,047	2,145	2,195
Crown-glass n° 9 et eau.	1,349	1,468	1,503	1,560	1,613	1,697
Flint-glass n° 13 et huile de térébenthine.....	1,868	1,844	1,783	1,843	1,861	1,899
Flint-glass n° 3 et crown- glass n° 9.....	1,729	1,714	1,767	1,808	1,914	1,956
Flint-glass n° 30 et crown-glass n° 13...	1,932	1,904	1,997	2,061	2,143	2,233
Flint-glass n° 23 et crown-glass n° 13...	1,904	1,940	2,022	2,107	2,168	2,268

(¹) FRAUNHOFER, *Mémoires de l'Académie de Munich*, V.

Ces résultats sont très instructifs ; ils montrent que la valeur du rapport calculé change avec les raies que l'on veut superposer ; par conséquent, on ne peut achromatiser toutes les couleurs à la fois. Quand on a satisfait au problème pour deux d'entre elles, elles font leurs foyers au même point ; mais toutes les autres en des points différents.

A la vérité, on peut achromatiser rigoureusement trois couleurs en superposant trois lentilles alternativement convexe, concave et convexe, formées par trois substances différentes. La distance focale est une fonction analogue à la précédente des rayons r, r', r'', r''' , et des indices des trois substances. En écrivant qu'elle est la même pour trois couleurs, on a deux équations qui déterminent r'', r''' , c'est-à-dire qui déterminent les deux dernières lentilles quand la première est donnée. On pourrait encore achromatiser quatre rayons par quatre lentilles et ainsi de suite ; mais la complication du travail deviendrait excessive. On ne superpose jamais plus de trois verres, et pour les grands objectifs des lunettes on n'en superpose que deux.

ACHROMATISME DES PRISMES. — Puisqu'on ne peut amener toutes les couleurs à un même foyer, il faut choisir. Mais la théorie ne nous apprend pas quelles sont les couleurs qu'il est le plus utile de superposer ; l'œil seul peut le faire en nous montrant le cas où les images paraissent le mieux achromatisées. Cette observation va nous conduire à une seconde méthode où l'on cherchera à rendre les images incolores, sans se préoccuper de mesurer les indices des diverses raies et de faire coïncider l'une ou l'autre d'entre elles.

On accole deux prismes dont les angles, inversement placés, sont A et A' , et les indices $n_1, \dots, n_7, n'_1, \dots, n'_7$. Si A et A' sont très petits, on peut admettre que les sinus d'incidence et de réfraction sont égaux aux angles i et r , et les formules ordinaires deviennent, pour le premier prisme et pour le rayon rouge,

$$i = n_1 r, \quad i' = n'_1 r', \quad \delta_1 = i + i' - A = (n_1 - 1)A.$$

Le second prisme donne de même

$$\delta'_1 = (n'_1 - 1)A',$$

et la déviation définitive est

$$\Delta_1 = \delta_1 - \delta'_1 = (n_1 - 1)A - (n'_1 - 1)A'.$$

Pour la couleur violette,

$$\Delta_7 = \delta_7 - \delta'_7 = (n_7 - 1)A - (n'_7 - 1)A'.$$

Pour que le rouge devienne parallèle au violet, il faut qu'on ait $\Delta_7 = \Delta_1$,

$$(2) \quad \begin{aligned} (n_7 - n_1)A &= (n'_7 - n'_1)A', \\ \frac{n_7 - n_1}{n'_7 - n'_1} &= \frac{A'}{A}. \end{aligned}$$

En comparant les équations (1) et (2), on trouve que

$$(3) \quad \frac{A'}{A} = \frac{\frac{1}{r''} + \frac{1}{r'}}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}}.$$

Si donc on avait réussi à achromatiser deux prismes A et A', le rapport de leurs angles permettrait de calculer le deuxième rayon de courbure r'' de la lentille concave qui achromatiserait une lentille convexe donnée, si toutes deux étaient formées des mêmes substances que les prismes A et A'. La question est ainsi transportée des lentilles aux prismes, et on va la résoudre en taillant deux prismes sous des angles quelconques A et A' dans les deux substances, et en achromatisant successivement chacun d'eux avec un troisième dont l'angle est variable et qu'on nomme *diasporamètre*.

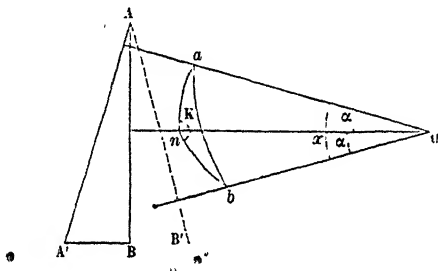
DIASPORAMÈTRE. — Rochon (1) place dans un cercle divisé vertical, qui est représenté (*Pl. I, fig. 2*) aux nos 6 et 7, deux prismes de même verre et de même angle α , l'un fixe, l'autre qui est mobile autour de l'axe de l'appareil et dont on mesure la rotation sur le cercle divisé. Leur ensemble réalise un seul

(1) ROCHON, *Recueil de Mémoires sur la Mécanique et la Physique : Mémoire sur la mesure de la dispersion et de la réfraction.*

prisme, dont l'angle formé par les faces extrêmes est égal à x et peut varier de zéro à 2α .

Pour le calculer, abaissons d'un point O (*fig. 122*) trois normales : On à la face de jonction AB , Oa à la face de sortie AA' du prisme fixe BAA' , Ob à la face d'entrée AB' du prisme mo-

Fig. 122.



bile BAB' . Les angles nOa , nOb sont égaux à α ; bOa est égal à x , et l'angle dièdre anb , formé par les sections normales des deux prismes, est égal à la rotation qu'on a imprimée au second ou à K . On a, pour calculer x ,

$$\cos x = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos K.$$

D'autre part, la section normale du prisme à angle variable est aOb ; elle fait avec celle du prisme fixe $A'AB$ un angle dièdre nab que l'on calculera de même

$$\cos \alpha = \cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x \cos nab.$$

Sur un cercle divisé vertical, pareil à celui qui porte le diasporamètre, on placera d'abord une fente étroite, et ensuite le prisme d'angle A pris dans l'une des substances qu'on veut étudier; on mettra à la suite le diasporamètre, primitivement amené à son zéro, et l'œil verra le spectre donné par le prisme A ; ensuite on fera progressivement tourner le diasporamètre d'un angle K et le prisme A avec sa fente de l'angle nab , de manière que les deux sections normales des deux prismes restent parallèles et que les angles soient opposés; on continuera la rotation jusqu'à ne plus voir de couleurs. A ce moment le prisme A sera achromatisé par celui du diasporamètre dont

l'angle sera x , et, en représentant par ν_1, \dots, ν_7 les indices extrêmes du diasporamètre, on aura

$$\frac{n_7 - n_1}{\nu_7 - \nu_1} = \frac{x}{A}.$$

En répétant la même opération avec le deuxième prisme A' pris dans la deuxième substance,

$$\frac{n'_7 - n'_1}{\nu'_7 - \nu'_1} = \frac{x'}{A'}$$

et, en divisant,

$$\frac{n_7 - n_1}{n'_7 - n'_1} = \frac{x A}{x' A'}.$$

Enfin, pour achromatiser deux lentilles des mêmes substances, il faudra faire

$$\frac{\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}}{\frac{1}{r'} + \frac{1}{r'}} = \frac{x A'}{x' A}.$$

L'inconvénient de cet appareil est la nécessité de faire tourner la section normale du prisme A pour qu'elle reste parallèle à celle du diasporamètre. A la vérité, on peut remédier à cet inconvénient, et M. Jamin a fait faire un diasporamètre où les deux prismes tournent à la fois d'un mouvement commun, l'un vers la droite, l'autre vers la gauche, ce qui produit le même effet que si l'un d'eux avait tourné d'un angle double, mais ce qui laisse immobile la section normale des faces extrêmes.

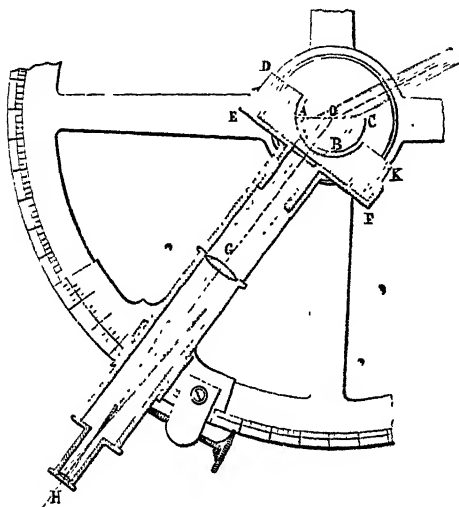
L'appareil de Boscovich, déjà décrit précédemment (*fig. 123*), réalise plus commodément les mêmes opérations. On place sur le demi-cylindre ABC le prisme à étudier; on éclaire le tout par une fente mince, et, en faisant mouvoir la lunette HG , on saisit le moment où le faisceau réfracté est incolore.

Brewster (') observe une fente verticale avec le prisme A

(') BREWSTER, *loc. cit.*

dont les arêtes sont parallèles à cette fente; il obtient un spectre d'une largeur inconnue x . Il le reçoit sur un second prisme dont l'angle est A_1 , qui est formé d'une substance dont les indices sont ν_1, \dots, ν_7 , et qui donne un spectre opposé de largeur connue l . Supposons que l soit plus grand que x , le premier spectre est interverti; mais, en tournant le deuxième

Fig. 123.



prisme d'un angle α , la largeur horizontale du spectre qu'il produit diminue et devient $l \cos \alpha$: c'est comme si son angle était diminué et devenu $A_1 \cos \alpha$. Quand $l \cos \alpha = x$, l'achromatisme est complet, et l'on a

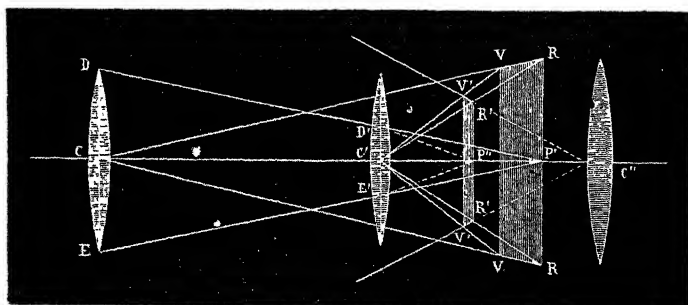
$$\frac{n_7 - n_1}{\nu_7 - \nu_1} = \frac{A_1 \cos \alpha}{A}.$$

On opère de même avec le prisme A' , et l'on arrive aux mêmes relations que précédemment.

On vient de voir que l'achromatisme des objectifs est toujours imparfait; il faut essayer de le compléter par des oculaires.

OCULAIRE D'HUYGENS (*). — Soit DE l'objectif d'une lunette, RRVV (fig. 124) l'image réelle et dispersée qu'il donne d'une ligne verticale. On place avant son plan focal une lentille D'E' qui empêche cette image de se former et concentre au point P'' les rayons D'P', E'P', qui devaient se concentrer en P'. Ceux qui aboutissaient en R feront leur image en R' sur l'axe secondaire C'R; et les violets qui arrivent en V auront leur foyer en V' sur l'axe C'V. En résumé, au lieu de l'image réelle RRVV, on en aura une autre R'R'V'V', dispersée comme la première; mais elle est dans des conditions bien différentes en ce que R'R' est plus petit que V'V', et qu'en prolongeant la ligne V'R',

Fig. 124.



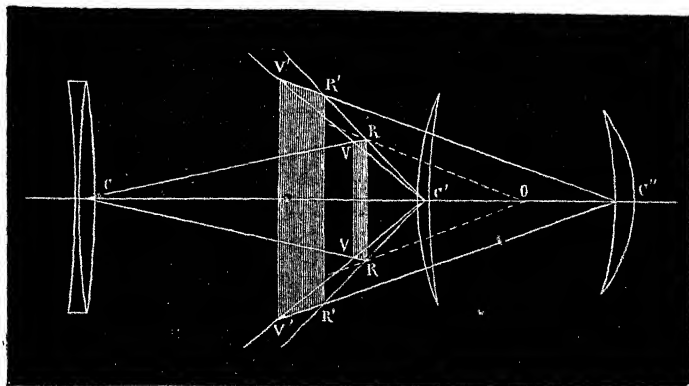
elle rencontrera l'axe en C''. Si l'œil est en C'', il verra les diverses images R', ..., V' de chaque point suivant la même direction; il verra toutes les couleurs superposées, l'image nette et incolore. Une seconde lentille placée en C'' grandit l'image V'R' et la recule à la distance de la vision distincte sans détruire son achromatisme. Cet objectif s'adapte parfaitement aux microscopes et n'a point été changé depuis Huygens; il convient moins aux lunettes par la raison qu'il faudrait placer le réticule en R'R' dans le tuyau de tirage et que l'axe ne serait pas fixe.

Le calcul du grossissement est analogue à celui que nous avons effectué pour le doublet de Wollaston (p. 121*).

(*) HUYGENS and HEVELIUS, *On the optic glasses, and other improvements in telescopes* (*Philosoph. Transact.*, 1663, p. 98).

OCULAIRE POSITIF. — Ramsden (1) a imaginé une autre disposition (*fig. 125*) : il laisse se former l'image VRVR donnée par l'objectif, et il l'observe par une première loupe C' qui forme une série d'images virtuelles; celle du rouge est sur les axes secondaires $R'R C'$, celle du violet sur $V'V C'$; et comme VV est beaucoup plus près du foyer principal de C' que ne l'est RR , l'image violette $V'V'$ est reculée plus loin que l'image rouge $R'R'$; elle est plus grande, et les lignes $V'R'$ vien-

Fig. 125.



nent se couper en C'' , point où se place une deuxième lentille qui agit comme une seconde loupe et fait voir les diverses images de chaque point à des distances différentes, ce qui n'est pas un grand inconvénient pour l'œil, mais suivant le même rayon visuel, ce qui superpose toutes les couleurs.

A ne considérer que le grossissement, le double oculaire de Ramsden fait voir l'image RR comme le ferait une seule loupe qu'on placerait en O , à l'intersection avec l'axe des lignes RO parallèles à $R'C''$. Plus C' sera rapproché de RR , plus O sera près de RR , et plus le grossissement sera considérable.

La formule donnée (page 121*) permet de calculer le grossis-

(1) RAMSDEN, *A description of a new construction of eye glasses for such telescopes, as may be applied to mathematical instruments* (*Philosoph. Transact.* n. 64. 1783).

sement. Ramsden faisait habituellement $f = f'$ et $D = \frac{2}{3}f$.

$$\text{Il en résulte } G = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \frac{\Delta}{f}.$$

Les oculaires multiples ont un autre avantage : c'est que leur aberration de sphéricité est très faible. L'étude des conditions qui font augmenter ou diminuer cette aberration ne peut trouver place ici. C'est une des questions les plus complexes de l'Optique. Elle a été traitée par Gauss ⁽¹⁾, Bravais ⁽²⁾, Biot ⁽³⁾. Nous renverrons à ces auteurs.

(¹) GAUSS, *Dioptrische Untersuchungen* (*Abhandl. d. Königl. Gesellsch. d. Wissensch.*, t. I), Göttingen.

(²) BRAVAIS, *Annales de Chimie et de Physique*, 3^e série, t. XXIII, p. 494; 1851.

(³) BIOT, *Sur les lunettes achromatiques à oculaires multiples* (*Annales de Chimie et de Physique*, 3^e série, t. III, p. 385; 1841); *Sur quelques points relatifs à l'Astronomie et aux instruments d'Optique* (*Comptes rendus*, t. XII, p. 269); *Sur un Mémoire de M. Gauss relatif à l'Optique analytique* (*Comptes rendus*, t. XII, p. 407); *Applications diverses d'une nouvelle théorie des instruments d'Optique* (*Comptes rendus*, t. XIX, p. 195; 1844). Voir aussi *Traité élémentaire d'Astronomie physique*; Paris, 1844-47.

CHAPITRE VI.

LENTILLES ÉPAISSES. — SYSTÈMES
OPTIQUES.

Réfraction par un système de surfaces sphériques centrées.

I. — Systèmes sans épaisseur. — Cas où les milieux extrêmes sont identiques. — Cas où les milieux extrêmes sont différents. — Cas où A_m est nul.

II. — Systèmes épais. — Cas de deux réfractions. — Points principaux. — Construction géométrique des images au moyen des plans principaux et des plans focaux. — Points nodaux. — Grossissement. — Cas d'un nombre quelconque de réfractions. — Cas où les milieux extrêmes sont identiques. — Lentilles épaisses dont les deux faces plongent dans un même milieu. — Centre optique. — Cas où les foyers sont à l'infini. — Nombre des éléments nécessaires pour déterminer les effets extérieurs d'un système optique. — Détermination expérimentale des éléments d'un système optique. — Instruments formés de lentilles épaisses.

RÉFRACTION PAR UN SYSTÈME DE SURFACES SPHÉRIQUES CENTRÉES. —

La théorie élémentaire des instruments d'Optique, développée dans le Chapitre précédent, permet de se rendre compte des conditions générales de leur établissement et de leurs principales propriétés optiques; c'est pourquoi nous avons voulu l'exposer d'abord en évitant d'y introduire prématurément tout ce qui aurait pu la compliquer en la rendant plus rigoureuse. Mais, si l'on veut passer aux calculs et aux mesures de précision qu'impliquent la construction et l'usage soit des grandes lunettes, soit des appareils pourvus d'un grand nombre de lentilles, comme les microscopes les plus perfectionnés, il devient indispensable de faire intervenir l'épaisseur des verres et de se livrer à une discussion approfondie des propriétés que possède, après un plus ou moins grand nombre de réfractions,

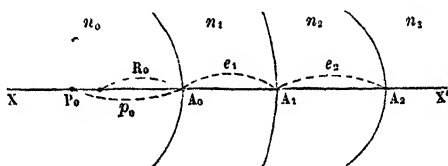
un faisceau de rayons primitivement issus d'un même point lumineux.

La théorie des lentilles épaisses et des systèmes optiques formés de surfaces sphériques centrées a été donnée par Gauss ⁽¹⁾, et perfectionnée par Listing ⁽²⁾. Elle consiste à appliquer les formules de la géométrie analytique à l'étude des faisceaux lumineux incidents et émergents. On en trouvera un exposé excellent dans les œuvres de Verdet ⁽³⁾.

La méthode de Gauss permet de déterminer sûrement l'ordre de grandeur des quantités que l'on néglige, et à ce titre, elle n'est guère susceptible de simplification; mais on peut lui substituer une théorie plus élémentaire, calquée en quelque sorte sur celle des lentilles infiniment minces et suffisante pour les besoins de l'enseignement ⁽⁴⁾. C'est celle que la forme de ce Traité nous impose d'adopter de préférence.

Soit une série de milieux (*fig. 126*) dont les indices, par

Fig. 126.



rapport au vide, sont $n_0, n_1, n_2, n_3, \dots$ séparés les uns des autres par des surfaces sphériques de faible ouverture et de même axe, de rayons R_0, R_1, R_2, \dots . Tous ces rayons sont

⁽¹⁾ GAUSS, *Dioptrische Untersuchungen* (Abhandl. Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1838-1843; traduit par Bravais dans les *Ann. de Ch. et de Phys.*, 3^e série, XXXIII, 259).

⁽²⁾ LISTING, *Ueber einige merkwürdige Punkte, in Linien und Liniensystemen* (*Ann. de Pogg.*, t. CXXIX, p. 466; 1866).

⁽³⁾ VERDET, *OEuvres*, t. IV, p. 894 (Conférences de Physique, faites à l'École Normale).

⁽⁴⁾ La théorie élémentaire des lentilles épaisses a été exposée par divers auteurs, notamment par MM. Adolphe Martin (*Ann. de Ch. et de Phys.*, 4^e série, t. X, p. 385; 1867), Galileo Ferraris (*Le proprietà cardinali degli strumenti diottrici*, Torino, 1877), etc., et en dernier lieu par M. Bortin (*Ann. de Ch. et de Phys.*, 5^e série, t. XIII, p. 486; 1878).

comptés positivement quand le centre de courbure correspondant est du côté de la lumière incidente. Nous désignons par e_1, e_2, \dots les distances des sommets des surfaces sphériques successives, et nous observerons que les quantités e_1, e_2, \dots , sont essentiellement positives.

Cela posé, soit un point lumineux réel ou virtuel P_0 situé dans le premier milieu sur l'axe commun de toutes les surfaces sphériques. Le point P_0 est le sommet d'un cône de rayons lumineux, qui, après leur réfraction par la surface R_0 , sont dans les mêmes conditions physiques que s'ils émanaient d'un point P_1 réel ou virtuel situé sur l'axe et appartenant au second milieu; ces rayons une fois réfractés forment donc un cône ayant pour sommet le point P_1 ; ils sont réfractés par la surface R_1 qui les transforme à son tour en un cône de rayons ayant pour sommet le point P_2 de l'axe et ainsi de suite. Le caractère des rayons ayant subi un nombre quelconque de réfractions reste donc toujours le même; ils forment toujours un cône ayant pour sommet un point de l'axe. En d'autres termes, un point lumineux réel ou virtuel pris sur l'axe dans le premier milieu donne, après un nombre quelconque de réfractions, une image réelle ou virtuelle située aussi sur l'axe.

Nous avons montré que, dans le cas de la réfraction par une surface sphérique unique, tous les points compris dans un même plan perpendiculaire à l'axe ont, au degré d'approximation convenu, des images contenues dans un même plan aussi perpendiculaire à l'axe. Il en sera donc de même après un nombre quelconque de réfractions, et aux points conjugués situés sur l'axe, correspondront toujours des plans conjugués élevés perpendiculairement à l'axe par ces points.

Nous désignerons par p_0 la distance d'un point lumineux situé sur l'axe au sommet A_0 de la première surface réfringente; par p_1, p_2, p_3, \dots la distance de chaque image successive au sommet de la surface réfringente qui l'a produite, c'est-à-dire que la distance p_1 est comptée par rapport à A_0 , p_2 par rapport à A_1 , etc. Toutes ces distances sont comptées positivement quand le point lumineux ou l'image considérée est placée, par rapport au sommet correspondant, du côté de la lumière incidente.

Avec ces conventions sur les signes des diverses quantités, l'application répétée des raisonnements que nous avons exposés au début de l'étude des lentilles conduira aux équations suivantes pour déterminer les distances inconnues p_1, p_2 et les grossissements g_1, g_2, \dots correspondant à chacune des réfractions prise isolément :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{n_1}{p_1} - \frac{n_0}{p_0} = \frac{n_1 - n_0}{R_0}, \\ \frac{n_2}{p_2} - \frac{n_1}{p_1 + e_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}, \\ \frac{n_3}{p_3} - \frac{n_2}{p_2 + e_2} = \frac{n_3 - n_2}{R_2}, \\ \dots \dots \dots, \\ \frac{n_m}{p_m} - \frac{n_{m-1}}{p_{m-1} + e_{m-1}} = \frac{n_m - n_{m-1}}{R_{m-1}}; \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_1 = \frac{n_0 p_1}{n_1 p_0}, \\ g_2 = \frac{n_1 p_2}{n_2 (p_1 + e_1)}, \\ g_3 = \frac{n_2 p_3}{n_3 (p_2 + e_2)}, \\ \dots \dots \dots, \\ g_m = \frac{n_{m-1} p_m}{n_m (p_{m-1} + e_{m-1})}. \end{array} \right.$$

Le problème consiste :

1° A obtenir une relation entre p_0 et p_m permettant de calculer la position de la dernière image, en fonction des données du problème; on l'obtient par l'élimination de p_1, p_2, \dots, p_{m-1} entre les m équations (1);

2° A déterminer le rapport G_n des dimensions linéaires de la dernière image et de l'objet. On le trouve par l'élimination de $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{m-1}, p_m$ entre les m équations (2) et l'équation (3)

$$(3) \quad G_m = g_1 g_2 \dots g_m$$

I. SYSTÈMES SANS ÉPAISSEUR. — Ainsi que nous avons déjà eu l'occasion de le constater dans le cas particulier des lentilles infiniment minces, le problème se simplifie beaucoup si les distances e_1, e_2, \dots sont assez petites pour qu'on puisse les négliger. En ce cas les équations (1) et (2) deviennent

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{n_1}{p_1} - \frac{n_0}{p_0} = \frac{n_1 - n_0}{R_0}, \\ \frac{n_2}{p_2} - \frac{n_1}{p_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}, \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{n_m}{p_m} - \frac{n_{m-1}}{p_{m-1}} = \frac{n_m - n_{m-1}}{R_{m-1}}; \end{array} \right.$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_1 = \frac{n_0 p_1}{n_1 p_0}, \\ g_2 = \frac{n_1 p_2}{n_2 p_1}, \\ \dots\dots\dots, \\ g_m = \frac{n_{m-1} p_m}{n_m p_{m-1}}; \end{array} \right.$$

et les éliminations deviennent très faciles. En ajoutant membre à membre les équations (4), on a

$$(6) \quad \frac{n_m}{p_m} - \frac{n_0}{p_0} = \frac{n_1 - n_0}{R_0} + \frac{n_2 - n_1}{R_1} + \dots + \frac{n_m - n_{m-1}}{R_{m-1}} = A_m;$$

posant

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_m = \frac{n_m}{A_m}, \\ f_0 = -\frac{n_0}{A_m}, \end{array} \right.$$

l'équation (6) se réduit à

$$(8) \quad \frac{f_m}{p_m} + \frac{f_0}{p_0} = 1.$$

D'autre part, on a

$$(9) \quad G_m = g_1 g_2 \dots g_m = \frac{n_0 p_m}{n_m p_0}.$$

Les équations (6) et (9) sont de même forme que celles qui se rapportent à la réfraction par une surface sphérique unique. On peut, en effet, déterminer le rayon P d'une surface sphérique fictive, séparant les milieux extrêmes d'indice n_0 et n_m et dont le sommet coïncide avec celui des surfaces réfringentes considérées, par la condition que l'on ait

$$\frac{n_m}{p_m} - \frac{n_0}{p_0} = \frac{n_m - n_0}{P};$$

d'où

$$P = \frac{n_m - n_0}{A_m},$$

et l'on a alors, pour le grossissement relatif à cette réfraction unique,

$$g'_1 = \frac{n_0 p_m}{n_m p_1} = G_m.$$

En donnant à l'équation (6) des foyers conjugués la forme (8), on voit que le système optique considéré admet en général deux plans focaux, dont les distances au sommet commun des surfaces réfringentes sont respectivement f_m et f_0 . Ces deux plans focaux sont situés de part et d'autre du sommet, et le rapport des deux distances focales, prises en valeur absolue, est

$$(10) \quad -\frac{f_m}{f_0} = \frac{n_m}{n_0}.$$

Il est égal à l'indice relatif du dernier milieu par rapport au premier.

CAS OU LES MILIEUX EXTRÊMES SONT IDENTIQUES. — Si les milieux extrêmes sont identiques, les deux distances focales deviennent égales en valeur absolue; l'équation des foyers conjugués se réduit à

$$(11) \quad \frac{1}{p_m} - \frac{1}{p_0} = \frac{1}{f_m},$$

et celle du grossissement à

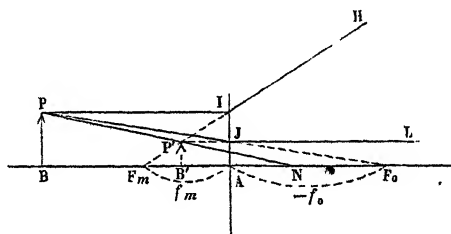
$$(12) \quad G_m = \frac{p_m}{p_0}.$$

- Ces équations sont celles qui conviennent à une lentille infiniment mince de distance focale f_m . Le système est donc équivalent à une telle lentille; suivant que f_m est positif ou négatif, le système est divergent ou convergent.

Le sommet commun des surfaces sphériques est un centre optique, et la construction géométrique des images se fait comme dans le cas d'une lentille infiniment mince. On détermine expérimentalement la distance focale, comme pour une lentille infiniment mince.

CAS OU LES MILIEUX EXTRÊMES SONT DIFFÉRENTS. — Si les milieux extrêmes sont différents, la construction des images s'effectuera au moyen des foyers, comme on l'a montré (page 96*) pour une surface sphérique unique.

Fig. 127.



Soient A (fig. 127) le sommet commun des surfaces sphériques, F_m et F_o les deux foyers. Le rayon PI parallèle à l'axe sort du système en IH, comme s'il était issu de F_m ; le rayon PJ dirigé vers F_o sort en JL, parallèlement à l'axe. Ces rayons prolongés se rencontrent en P' et l'image de PB est P'B'.

Les triangles semblables JAF_m, P'B'F_m d'une part, JAF_o, PBF_o d'autre part, donnent

$$\frac{P'B'}{PB} = \frac{f_m - p_m}{f_m} = \frac{-f_o}{p_0 - f_o};$$

d'où

$$\frac{p_m}{f_m} = \frac{p_0}{p_0 - f_0}$$

et, par suite,

$$(13) \quad G_m = \frac{\overline{P'B'}}{\overline{PB}} = -\frac{f_0}{p_0 - f_0} = -\frac{f_0}{p_0} \frac{p_0}{p_0 - f_0} = -\frac{f_0 p'_m}{p_0 f_m};$$

c'est une nouvelle expression du grossissement qui se déduit, d'ailleurs, immédiatement de la comparaison des formules (9) et (10).

La droite qui joint le point P au point P' est la direction d'un rayon émergent, dont le prolongement coïncide avec le rayon incident qui lui a donné naissance. C'est le *rayon sans déviation*. La droite PP' rencontre l'axe en un point N, dont la distance x au point A peut être déterminée de la manière suivante.

Les triangles semblables P'B'N, PBN donnent *

$$(14) \quad \frac{\overline{P'B'}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{B'N}}{\overline{BN}} = \frac{p_m - x}{p_0 - x};$$

on a d'ailleurs

$$(15) \quad \frac{\overline{P'B'}}{\overline{PB}} = \frac{f_m - p_m}{f_m} = \frac{-f_0}{p_0 - f_0} = \frac{p_m - (f_m + f_0)}{p_0 - (f_m + f_0)}.$$

En comparant (14) et (15), on voit que

$$(16) \quad x = f_m + f_0;$$

chacune de ces quantités étant, bien entendu, prise avec son signe. La distance x est donc fixe et égale, en valeur absolue, à la différence des deux longueurs focales qui sont, comme on sait, de signe contraire.

Le point N a reçu le nom de *point nodal*. C'est le point qui coïncide avec sa propre image, et l'on peut déterminer x par cette condition, à l'aide de la formule (8). Il jouit, pour un système optique sans épaisseur, des propriétés dont jouit, pour une surface sphérique unique, le centre de courbure de cette surface.

CAS OU A_m EST NUL. — La quantité A_m , du calcul de laquelle dépendent les deux distances focales, est une somme de quantités de la forme $\frac{n_i - n_{i-1}}{R_{i-1}}$, qui peuvent être indifférem-

ment positives ou négatives. Il peut donc arriver que cette somme soit nulle, et alors les distances focales sont infinies; la formule (8) devient illusoire. Mais la formule (6) prend la forme très simple

$$(17) \quad \frac{p_m}{p_0} = \frac{n_m}{n_0},$$

et la formule (9) du grossissement se réduit à

$$(18) \quad G_m = 1;$$

l'image est toujours égale à l'objet et droite; sa distance au sommet des surfaces sphériques est à celle de l'objet dans un rapport égal à l'indice relatif du dernier milieu par rapport au premier. Ce cas est comparable à la réfraction opérée par une surface plane.

II. — SYSTÈMES ÉPAIS.

CAS DE DEUX RÉFRACTIONS SEULEMENT. — L'étude des systèmes infiniment minces nous conduit ainsi, dans tous les cas, à des résultats d'une extrême simplicité. Il est temps de nous occuper des systèmes réels, dans lesquels les épaisseurs e_1, e_2, \dots sont des quantités quelconques. Nous nous bornerons d'abord au cas de deux réfractions seulement.

Les équations à résoudre sont

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{n_1}{p_1} - \frac{n_0}{p_0} = \frac{n_1 - n_0}{R_0}, \\ \frac{n_2}{p_2} - \frac{n_1}{p_1 + e_1} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}; \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} g_1 = \frac{n_0 p_1}{n_1 p_0}, \\ g_2 = \frac{n_1 p_2}{n_2 (p_1 + e_1)}, \end{cases}$$

$$(3) \quad G_2 = g_1 g_2.$$

Nous écrirons les équations (1) sous la forme

$$(1 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \frac{f_1}{p_1} + \frac{f_0}{p_0} = 1, \\ \frac{f_2}{p_2} + \frac{f'_1}{p_1 + e_1} = 1, \end{cases}$$

en posant

$$(4) \quad \begin{cases} f_1 = \frac{n_1 R_0}{n_1 - n_0}, & f_0 = \frac{n_0 R_0}{n_1 - n_0} \\ f'_1 = -\frac{n_1 R_1}{n_2 - n_1}, & f_2 = -\frac{n_2 R_1}{n_2 - n_1} \end{cases}$$

On remarquera d'ailleurs que

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{f_1}{n_1} = -\frac{f_0}{n_0}, \\ \frac{f'_1}{n_1} = -\frac{f_2}{n_2}, \end{cases}$$

ce qui permettra de ne conserver, dans les calculs, que f_0 et f_2 .

En éliminant p_1 entre les équations (1 bis), on obtient

$$(6) \quad \frac{e_1}{n_1} = -\frac{1}{n_2} \frac{p_2 f_2}{p_2 - f_2} + \frac{1}{n_0} \frac{p_0 f_0}{p_0 - f_0}.$$

Cette équation pourrait être appliquée directement au calcul de p_2 , mais il convient de la ramener à une forme plus simple. A cet effet, chassons d'abord les dénominateurs; il vient

$$\begin{aligned} & \left(\frac{e_1}{n_1} + \frac{f_2}{n_2} - \frac{f_0}{n_0} \right) p_2 p_0 \\ & - f_2 \left[\frac{e_1}{n_1} - \frac{f_0}{n_0} \right] p_0 - f_0 \left[\frac{e_1}{n_1} + \frac{f_2}{n_2} \right] p_2 + \frac{e_1}{n_1} f_0 f_2 = 0 \end{aligned}$$

ou, en posant

$$(7) \quad \begin{cases} A = \frac{e_1}{n_1} + \frac{f_2}{n_2} - \frac{f_0}{n_0}, \\ B = -f_2 \left(\frac{e_1}{n_1} - \frac{f_0}{n_0} \right), \\ C = -f_0 \left(\frac{e_1}{n_1} + \frac{f_2}{n_1} \right), \\ D = \frac{e_1}{n_1} f_0 f_2; \end{cases}$$

$$(8) \quad A p_2 p_0 + B p_0 + C p_2 + D = 0.$$

Je dis que l'équation (8) peut être ramenée à la forme

$$\frac{F_0}{P_0} + \frac{F_2}{P_2} = 1.$$

A cet effet, posons

$$(9) \quad \begin{cases} p_0 = P_0 + a_0, \\ p_2 = P_2 + a_2, \end{cases}$$

ce qui revient à compter les distances P_0 et P_2 à partir de nouvelles origines situées, la première à une distance a_0 en avant de la première courbure, la seconde à une distance a_2 en avant de la deuxième courbure. Substituons à p_0 et p_2 leurs valeurs (9) dans l'équation (8); celle-ci devient

$$(10) \quad \begin{cases} A P_0 P_2 + (A a_2 + B) P_0 \\ + (A a_0 + C) P_2 + A a_0 a_2 + B a_0 + C a_2 + D = 0. \end{cases}$$

Or nous sommes libres de choisir a_0 et a_2 . Nous pouvons, en particulier, astreindre ces deux quantités à vérifier l'équation

$$(11) \quad A a_0 a_2 + B a_0 + C a_2 + D = 0;$$

et alors l'équation (10) devient

$$A P_0 P_2 + (A a_2 + B) P_0 + (A a_0 + C) P_2 = 0$$

ou, en posant

$$(12) \quad \begin{cases} F_0 = -\left(a_0 + \frac{C}{A}\right), \\ F_2 = -\left(a_2 + \frac{B}{A}\right), \end{cases}$$

$$(13) \quad \frac{F_0}{P_0} + \frac{F_2}{P_2} = 1.$$

L'équation (13) est de la même forme que chacune des équations (1 bis) correspondant à la réfraction par une surface unique; et, pour amener ce résultat, il a suffi d'astreindre a_2 et a_0 à vérifier l'équation (11). Or celle-ci exprime que les nouvelles origines sont deux points conjugués, par rapport au système optique des deux surfaces réfringentes. Ces points conjugués peuvent jusqu'ici être quelconques.

POINTS PRINCIPAUX. — Pour achever de déterminer les origines à partir desquelles il convient de compter P_0 et P_2 , il faut astreindre a_0 et a_2 à une condition nouvelle. Par exemple, nous pouvons exiger que, pour les plans conjugués passant par les origines, le grossissement G_2 soit égal à 1. Or on a, d'après les équations (2), (3), (1 bis), (5) et (9),

$$(14) \quad \begin{cases} g_1 = \frac{n_0 p_1}{n_1 p_0} = -\frac{f_0}{p_0 - f_0}, \\ g_2 = \frac{n_1 p_2}{n_2 (p_1 + e_1)} = -\frac{p_2 - f_2}{f_2}, \\ G_2 = g_1 g_2 = \frac{f_0}{f_2} \frac{p_2 - f_2}{p_0 - f_0} = \frac{f_0}{f_1} \frac{P_2 + a_2 - f_2}{P_0 + a_0 - f_0}. \end{cases}$$

La condition imposée, c'est que, pour $P_0 = 0$, $P_2 = 0$ on ait $G_2 = 1$. Il faut donc que

$$\frac{f_0}{f_2} \frac{a_2 - f_2}{a_0 - f_0} = 1,$$

c'est-à-dire que

$$(15) \quad \frac{a_2}{a_0} = \frac{f_2}{f_0}.$$

Les équations (11) et (15) déterminent complètement a_0 et a_2 . On trouve, en rejetant une solution étrangère,

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} a_0 &= \frac{\frac{e_1}{n_1} f_0}{\frac{e_1}{n_1} + \frac{f_2}{n_2} - \frac{f_0}{n_0}}, \\ a_2 &= \frac{\frac{e_1}{n_1} f_2}{\frac{e_1}{n_1} + \frac{f_2}{n_2} - \frac{f_0}{n_0}}. \end{aligned} \right.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (12), il vient

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} F_0 &= \frac{\frac{f_0 f_2}{n_2}}{\frac{e_1}{n_1} + \frac{f_2}{n_2} - \frac{f_0}{n_0}}, \\ F_2 &= \frac{-\frac{f_0 f_2}{n_0}}{\frac{e_1}{n_1} + \frac{f_2}{n_2} - \frac{f_0}{n_0}}. \end{aligned} \right.$$

On remarquera : 1° que a_0 et a_2 sont en général du même ordre de grandeur que la distance e_1 des deux courbures et s'annulent en même temps que cette épaisseur;

2° Que l'on a entre F_0 et F_2 la relation

$$(18) \quad \frac{F_2}{F_0} = -\frac{n_2}{n_0},$$

de même forme que celle qui se rapporte aux deux distances focales d'une surface sphérique unique.

Les plans conjugués pour lesquels le grossissement est égal à 1 se nomment *plans principaux*, et les longueurs F_0 , F_2 , les *distances focales principales* du système optique.

Les équations auxquelles nous sommes parvenus donnent la solution complète du problème que nous nous étions proposé. D'ailleurs, il est aisé de voir que, quand on aura calculé les expressions (16) et (17), on se trouvera conduit à une

construction géométrique très simple des images, et l'on se trouvera dispensé de faire usage des formules (13) et (14) des foyers conjugués et du grossissement.

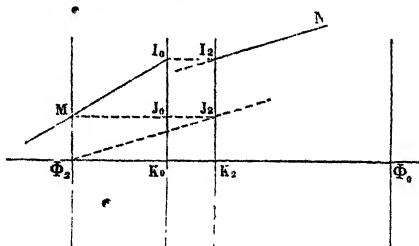
CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DES IMAGES AU MOYEN DES PLANS PRINCIPAUX ET DES PLANS FOCaux. — On désigne sous le nom de *plans focaux* les plans Φ_0 et Φ_2 perpendiculaires à l'axe et dont les distances aux plans principaux correspondants sont respectivement F_0 et F_2 .

L'équation (13) des plans conjugués

$$\frac{F_0}{P_0} + \frac{F_2}{P_2} = 1,$$

analogue à celle des systèmes infiniment minces, donne, pour $P_0 = \infty$, $P_2 = F_2$; ce qui signifie que, si le point lumineux est à l'infini, son image se forme dans le plan Φ_2 ; ou encore qu'un système quelconque de rayons parallèles se réfracte à tra-

Fig. 128.



vers le système, de telle sorte que tous les rayons réfractés (ou leurs prolongements) rencontrent le plan Φ_2 en un même point. De même, pour $P_2 = \infty$, on a $P_0 = F_0$, c'est-à-dire que des rayons issus d'un même point du plan Φ_0 sortent du système optique, en formant un faisceau de rayons parallèles.

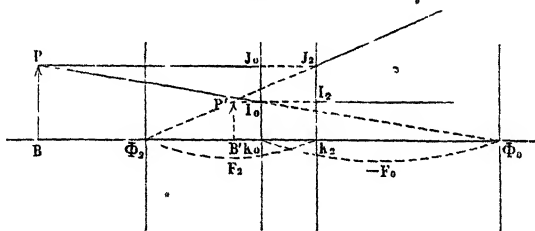
D'autre part, observons que les plans principaux K_0 , K_2 (fig. 128) sont caractérisés par la propriété que ces deux plans sont conjugués par rapport au système optique, et que l'image d'un objet linéaire $K_0 I_0$, situé dans le premier plan, est droite et égale à l'objet. Cette image $K_2 I_2$ s'obtiendra donc en me-

nant par I_0 une parallèle à l'axe jusqu'au second plan principal. Puisque I_2 est l'image de I_0 , tout rayon incident rencontrant le premier plan principal en I_0 fournit un rayon réfracté qui rencontre en I_2 le second plan principal.

Cela posé, soit MI_0 un rayon incident quelconque rencontrant le premier plan focal et le premier plan principal respectivement en M et I_0 . Nous connaissons déjà un point I_2 du rayon réfracté; il suffit de trouver la direction de ce rayon : à cet effet, menons par M la parallèle à l'axe MJ_0 ; le rayon réfracté correspondant à MJ_0 passe par J_2 et par Φ_2 , et puisque tous les rayons issus de M sortent du système optique parallèles entre eux, le rayon réfracté I_2N correspondant à MI_0 est parallèle à Φ_2J_2 .

Proposons-nous maintenant de construire l'image d'un point P situé en dehors de l'axe du système. Il suffit de construire

Fig. 129.



les rayons réfractés correspondant à deux rayons incidents issus du point P . Nous choisirons (fig. 129) le rayon PJ_0 parallèle à l'axe qui se réfracte suivant Φ_2J_2 , et le rayon PI_0 dirigé vers le foyer Φ_0 qui se réfracte parallèlement à l'axe. Le point de rencontre P' de ces deux rayons est l'image du point P , et $P'B'$ est l'image de l'objet linéaire PB perpendiculaire à l'axe.

Cette construction de l'image ne diffère de celle qui a été appliquée aux systèmes infiniment minces qu'en ce que le plan focal double coïncidant avec le sommet du système optique ($p=0, p'=0$) s'est dédoublé en donnant naissance aux deux plans principaux, et que le rayon réfracté part toujours du point du *second plan principal* correspondant à

point où le rayon incident rencontre le *premier plan principal*.

POINTS NODAUX. — La construction précédente fournit une expression très simple du grossissement. Les triangles semblables $P'B'\Phi_2$, $J_2K_2\Phi_2$ et $I_0K_0\Phi_0$, $PB\Phi_0$ donnent en effet ⁽¹⁾

$$(19) \quad G_2 = \frac{\overline{P'B'}}{PB} = \frac{P_2 - F_2}{-F_2} = \frac{-F_0}{P_0 - F_0};$$

d'où, ajoutant les numérateurs et les dénominateurs des deux derniers rapports

$$(20) \quad G_2 = \frac{P_2 - (F_0 + F_2)}{P_0 - (F_0 + F_2)}.$$

Soient O et O' les points dont les distances aux points principaux sont égales à $F_0 + F_2$; les distances BO , $B'O'_0$ sont respectivement égales à $P_0 - (F_0 + F_2)$, $P_2 - (F_0 + F_2)$, et les triangles PBO , $P'B'O'$ sont semblables. Il en résulte que les droites PO , $P'O'$ sont parallèles; c'est-à-dire qu'un rayon incident quelconque, dirigé vers le point O , donne un rayon réfracté parallèle passant par le point O' . Ces deux points O , O' , conjugués par rapport au système optique, sont désignés sous le nom de *points nodaux*: ils sont séparés l'un de l'autre par la même distance $a_0 - a_2 + e_1$ qui sépare les deux points principaux; et, de même que ces deux derniers jouent, dans la construction des images, le rôle du sommet d'une surface sphérique unique, pour ainsi dire dédoublé, les points nodaux

(1) On peut obtenir les mêmes relations à l'aide de la formule (14) en y remplaçant a_2 et a_0 par leurs valeurs en fonctions de F_2 et F_0 ; puis substituant soit à P_0 , soit à P_2 leurs expressions tirées de la formule (13) des foyers conjugués.

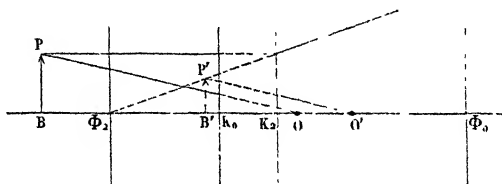
Par exemple, en éliminant P_2 , on obtient successivement

$$\begin{aligned} G_2 &= \frac{\frac{P_2}{f_2} + \frac{f_0}{n_0 A} - \frac{f_2}{n_2 A}}{\frac{P_0}{f_0} + \frac{f_0}{n_0 A} - \frac{f_2}{n_2 A}} = \frac{\frac{P_2}{f_2} - \left(\frac{F_2}{f_2} + \frac{F_0}{f_0}\right)}{\frac{P_0}{f_0} - \left(\frac{F_2}{f_2} + \frac{F_0}{f_0}\right)} \\ &= \frac{\frac{P_0}{P_0 - F_0} \frac{F_2}{f_2} - \left(\frac{F_2}{f_2} + \frac{F_0}{f_0}\right)}{\frac{P_0}{f_0} - \left(\frac{F_2}{f_2} + \frac{F_0}{f_0}\right)} = \frac{-F_0}{P_0 - F_0}. \end{aligned}$$

jouent le rôle du centre de courbure, également dédoublé, et peuvent aussi être employés à la construction des images.

Soit, par exemple, à déterminer l'image du point P (fig. 130);

Fig. 130.



on joint PO, et l'on mène par le point O' une parallèle à PO; on mène ensuite par le point P le rayon parallèle à l'axe. On construit, comme on l'a vu ci-dessus, le rayon réfracté correspondant, et l'intersection P' des deux rayons réfractés donne l'image du point P.

GROSSISSEMENT. — La formule des foyers conjugués donne

$$\frac{P_2 - F_2}{F_0} = \frac{P_2}{P'_0}.$$

Il en résulte que

$$(21) \quad G_2 = \frac{P_2 - F_2}{-F_2} = \frac{P_2 - F_2}{F_0} \frac{F_0}{-F_2} = -\frac{F_0 P_2}{F_2 P'_0} = \frac{n_0 P_2}{n_2 P'_0}.$$

Cette expression du grossissement est la plus usitée. Elle offre l'avantage d'être identique à celle du grossissement par une surface sphérique unique (1).

(1) Soit une lentille biconvexe de rayons de courbure égaux,

$$R_0 = -R_1 = 5^m,$$

d'indice $n = 1,5$, d'épaisseur $0^m.05$, limitée d'un côté par de l'air, de l'autre par de l'eau dont l'indice est $1,333$. On a $\frac{n_1}{n_0} = \frac{1,5}{1,333}$,

$$a_0 = -0^m,00834$$

$$a_1 = 0^m,03336$$

$$F_0 = 7^m,50625$$

$$F_1 = -10^m,000834.$$

Les plans nodaux sont à une distance $F_1 + F_2 = -2^m,5021$, en arrière des plans principaux.

Si l'on considérait la lentille comme infiniment mince, on porterait le foyer J. et B., *Optique*. — III. 2^e fasc.

CAS D'UN NOMBRE QUELCONQUE DE RÉFRACTIONS. — Nous sommes maintenant en mesure d'étudier ce qui se passe quand le nombre des réfractions est supérieur à deux. Considérons d'abord le cas de trois réfractions. Le système des équations à résoudre est, pour les foyers conjugués,

$$\frac{F_0}{P_0} + \frac{F_2}{P_2} = 1,$$

$$\frac{n_3}{p_3} - \frac{n_2}{p_2 + e_2} = \frac{n_3 - n_2}{R_3}$$

ou encore

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{F_0}{P_0} + \frac{F_2}{P_2} = 1, \\ \frac{f_3}{p_3} + \frac{f_2}{p_2 + a_2 + e_2} = 1, \end{cases}$$

en posant

$$(23) \quad \begin{cases} f_3 = \frac{n_3 R_3}{n_3 - n_2}, \\ f_2 = - \frac{n_2 R_3}{n_3 - n_2}; \end{cases}$$

d'où

$$\frac{f_2}{f_3} = - \frac{n_2}{n_3}.$$

Pour le grossissement, on a

$$(24) \quad \begin{cases} G_2 = \frac{n_2 P_0}{n_0 P_2}, \\ G_3 = \frac{n_2 p_3}{n_3 (P_2 + a_2 + e_2)}, \\ G_3 = G_2 g_3. \end{cases}$$

antérieur à 7^m,5 en avant de la courbure antérieure, soit à 2^{mm},09, trop en avant; quant au foyer postérieur, il serait trop éloigné de la courbure postérieure de 2^{mm},026.

L'erreur sur le grossissement sera tout à fait négligeable.

Les équations (22) et (24) ne diffèrent des équations (1 bis), (2) et (3), que par les substitutions suivantes.

Elles contiennent :

F_2	au lieu de	f_1 ,
F_0	»	f_0 ,
f_3	»	f_2 ,
f'_2	»	f'_1 ,
P_2	»	P_1 ,
P_0	»	p_0 ,
p_3	»	p_2 ,
$a_2 + e_2$	»	e_1 ,
n_2	»	n_1 ,
n_3	»	n_2 .

On peut donc traiter ces équations de la même manière.
Posant

$$(25) \quad \begin{cases} P_0 = P'_0 + a'_0, \\ p_3 = P'_3 + a_3, \end{cases}$$

on déterminera a'_0 et a_3 par la double condition que l'équation des foyers conjugués prenne la forme

$$(26) \quad \frac{F'_0}{P'_0} + \frac{F_3}{P_3} = 1,$$

et que le grossissement, pour les plans conjugués coïncidant avec les nouvelles origines, soit égal à 1. On obtiendra ainsi pour a'_0 , a_3 , F'_0 , F_3 les valeurs

$$(27) \quad \begin{cases} a'_0 = \frac{\frac{a_2 + e_2}{n_2} F_0}{\frac{a_2 + e_2}{n_2} + \frac{f_3}{n_3} - \frac{F_0}{n_0}} \\ a_3 = \frac{\frac{a_2 + e_2}{n_2} f_3}{\frac{a_2 + e_2}{n_2} + \frac{f_3}{n_3} - \frac{F_0}{n_0}} \end{cases}$$

et

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} F'_0 = \frac{\frac{F_0 f_3}{n_3}}{\frac{a_2 + e_2}{n_2} + \frac{f_3}{n_3} - \frac{F_0}{n_0}}, \\ F_3 = \frac{-\frac{F_0 f_3}{n_0}}{\frac{a_2 + e_2}{n_2} + \frac{f_3}{n_3} - \frac{F_0}{n_0}}, \end{array} \right.$$

qui se calculeront sans peine au moyen de a_0 et de F_0 . Le système optique à trois courbures possède donc des plans principaux et des plans focaux, et les deux distances focales principales sont liées entre elles par la relation caractéristique

$$(29) \quad \frac{F'_0}{F_3} = -\frac{n_3}{n_0}.$$

De même l'expression G_3 du grossissement peut se mettre sous la forme

$$(30) \quad G_3 = \frac{P_3 - (F'_0 + F_3)}{P_0 - (F'_0 + F_3)},$$

et le système admet deux points nodaux situés à une distance $F'_0 + F_3$ en avant des points principaux correspondants.

Enfin on peut écrire

$$(31) \quad G_3 = \frac{n_0 P_3}{n_3 P_0},$$

et l'expression du grossissement se trouve ainsi ramenée à la même forme que pour une ou deux surfaces sphériques.

En résumé, l'adjonction d'une troisième réfraction aux deux premières n'introduit pas de complication nouvelle : les propriétés générales du système optique ne sont pas modifiées, mais seulement la position des plans principaux et la valeur des distances focales. Il en sera de même si le nombre des réfractions est de 4, 5, ..., m , et l'on calculera de proche en proche la position des points principaux et des points nodaux

et les distances focales principales par l'application répétée des mêmes formules, en opérant à chaque fois les substitutions convenables.

CAS OU LES MILIEUX EXTRÊMES SONT IDENTIQUES. — On a d'une manière générale pour un système optique formé d'un nombre déterminé de surfaces sphériques centrées, et en désignant par f et f' les distances focales principales, P et P' les distances de deux foyers conjugués quelconques aux plans principaux correspondants, par n et n' les indices des milieux extrêmes et par G le grossissement,

$$(32) \quad \frac{f}{P} + \frac{f'}{P'} = 1,$$

$$(33) \quad G = \frac{n P'}{n' P};$$

d'ailleurs

$$(34) \quad \frac{f}{f'} = - \frac{n'}{n}.$$

Quand les milieux extrêmes sont identiques,

$$n = n'$$

et, par suite,

$$f' = -f.$$

La formule des foyers conjugués devient

$$(35) \quad \frac{1}{P'} - \frac{1}{P} = - \frac{1}{f} = \frac{1}{f'},$$

identique à celle des lentilles infiniment minces.

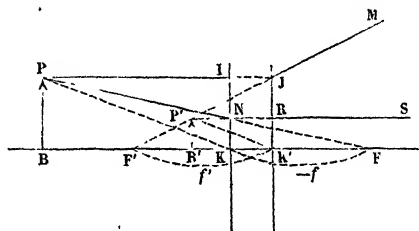
Puisque $f + f' = 0$, la distance de chaque point nodal au point principal correspondant s'annule : ces deux sortes de points se confondent. L'expression du grossissement se réduit à

$$(36) \quad G = \frac{P'}{P};$$

elle est, comme l'équation des foyers conjugués, identique à celle des lentilles infiniment minces.

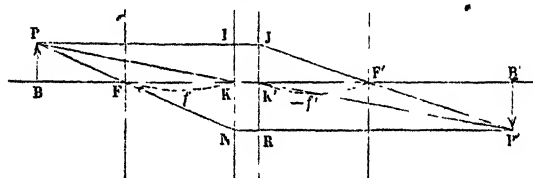
Suivant que f' est positif ou négatif, le système optique est comparable à une lentille infiniment mince, divergente ou

Fig. 131.



convergente. Les fig. 131 et 132 montrent la construction géométrique des images. Dans ces deux cas, on peut em-

Fig. 132.



ployer à volonté deux des trois rayons PI, PF, PK, auxquels correspondent les rayons réfractés $F'J$, RP' , $K'P'$.

LENTILLES ÉPAISSES DONT LES DEUX FACES PLONGENT DANS UN MÊME MILIEU. — CENTRE OPTIQUE. — Le cas pratique le plus fréquent est celui d'une lentille épaisse d'indice n_1 , dont les deux faces plongent dans un même milieu d'indice n_0 . En faisant $n_2 = n_0$ dans les formules générales relatives à deux réfractions, on trouve

$$(37) \quad \frac{1}{P'} - \frac{1}{P} = -\frac{1}{f},$$

$$f = F_0 = \frac{\frac{f_0 f_2}{n_0}}{\frac{e_1}{n_1} + \frac{f_2 - f_0}{n_0}}$$

ou, en remplaçant f_0 et f_2 par leurs valeurs,

$$(38) \quad f = \frac{n_0 R_0 R_1}{(n_0 - n_1) \left(\frac{n_0 - n_1}{n_1} e_1 + R_1 - R_0 \right)}$$

On peut encore introduire l'indice relatif $\frac{n_1}{n_0} = n$ de la lentille par rapport au milieu ambiant, et, si l'on suppose, comme de coutûme, que ce milieu est de l'air, $n_0 = 1$,

$$(39) \quad f' = -f = \frac{-n R_0 R_1}{(n - 1) [n(R_0 - R_1) + (n - 1)e]}.$$

On trouve de même

$$(40) \quad \begin{cases} a = a_0 = \frac{-e R_0}{n(R_0 - R_1) + (n - 1)e}, \\ a' = a_2 = \frac{-e R_1}{n(R_0 - R_1) + (n - 1)e}. \end{cases}$$

La distance des deux plans principaux qui sont aussi les points nodaux est $a' - a + e$ ⁽¹⁾.

(1) La quantité $a' - a + e$ est très sensiblement égale à $\frac{e}{n}$. Ainsi, pour une lentille biconvexe dont les rayons de courbure sont de 5^m, l'épaisseur de 0^m,05, l'indice 1,5, on a

$$\frac{e}{n} = 0^m,03333, \quad a' - a = 0^m,03389;$$

les distances des plans principaux aux sommets correspondants sont

$$-a = a' = 0^m,01681.$$

La distance focale $f = 5^m,00835$; si l'on considérait la lentille comme infi-

Fig. 133.

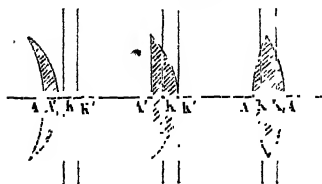
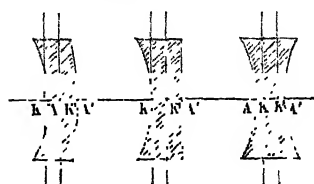


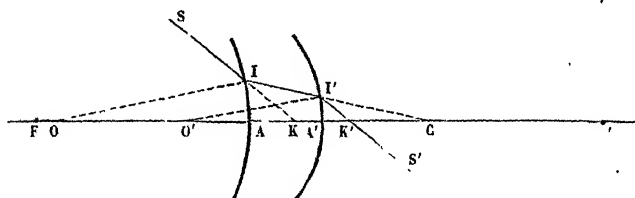
Fig. 134.



niment mince, on prendrait pour cette distance 5^m en avant de la courbure

On désigne, sous le nom de *Centre optique* d'une lentille, un point tel que tout rayon qui traverse la lentille en passant par ce point sort parallèlement à sa direction primitive. Or nous savons que tout rayon dirigé vers le point principal K sort de la lunette dans une direction parallèle passant par le second point principal K' . Soit C (fig. 135) le point conjugué

Fig. 135.



de K par rapport à la première courbure, il sera aussi le point conjugué de K' par rapport à la seconde courbure, et tout rayon dirigé vers K , c'est-à-dire jouissant de la propriété d'émerger de la lentille parallèlement à sa direction primitive, traversera la lentille dans une direction qui passe par le point C . Ce point est donc le centre optique.

La position du point C peut se déterminer sans calcul. Menons par les centres O et O' des deux courbures deux droites parallèles OI , $O'I'$ et joignons II' . Cette droite coupe l'axe en un point C , déterminé par la relation

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{O'C}} = \frac{R_0}{R_1}.$$

Le point C est fixe et divise extérieurement la droite OO' en segments proportionnels aux rayons. Comme d'ailleurs II' fait, à l'intérieur de la lentille, des angles égaux avec les normales aux faces d'entrée et de sortie, les rayons extérieurs SI , $I'S'$

antérieure et par conséquent $5^{\text{m}},01629$ en avant du plan principal antérieur. Le foyer serait donc à $8^{\text{mm}},4$ en avant de sa position réelle.

Il est utile de s'habituer à reconnaître la position qu'occupent les plans principaux par rapport aux courbures de la lentille épaisse. Ils sont disposés comme l'indiquent les figures ci-jointes.

sont parallèles. Le point C jouit donc de la propriété que tout rayon, qui, dans l'intérieur de lentille, est dirigé vers ce point, possède à l'extérieur des directions parallèles. C'est le *centre optique*. La propriété qu'il possède se trouve ainsi établie *rigoureusement*.

Le centre optique étant connu, nous pouvons calculer sans difficulté la position des points principaux K et K'. Soit en effet K le point où le rayon SI rencontre l'axe. Au degré d'approximation où nous avons établi la formule de la réfraction par une surface sphérique, le point C est, par rapport à la surface A, l'image du point K, et par suite le point K est fixe; de même le point K' est fixe, comme image du point C à travers la surface A'; en définitive, les deux points nodaux K et K' sont conjugués par rapport à la lentille. On trouve aisément

$$OC = R \left(1 + \frac{e}{R_0 - R_1} \right), \quad OC' = R_1 \left(1 + \frac{e}{R_0 - R_1} \right),$$

et, en appliquant les formules de la réfraction par une surface sphérique,

$$AK = \frac{-eR_0}{n(R_0 - R_1) + (n-1)e},$$

$$A'K' = \frac{-eR_1}{n(R_0 - R_1) + (n-1)e}.$$

Ce sont bien les valeurs calculées précédemment.

GAS OU LES FOCERS SONT À L'INFINI. — Reprenons les formules générales d'un système optique formé de deux surfaces réfringentes seulement. Les valeurs de a_0 , a_2 , F_0 , F_2 ont pour dénominateur commun

$$A = \frac{e_1}{n_1} + \frac{f_2}{n_2} - \frac{f_0}{n_0};$$

si $A = 0$, les plans principaux et les plans focaux se trouvent rejetés à l'infini; la transformation analytique des formules des foyers conjugués et du grossissement ainsi que la construction des images que nous avons indiquées deviennent illusoires. Pour savoir ce qui se passe, il faut avoir recours aux équations non transformées.

Quand

$$(41) \quad A = \frac{e_1}{n_1} + \frac{f_2}{n_2} - \frac{f_0}{n_0} = 0,$$

l'équation (10)

$$Ap_2 p_0 + Bp_0 + Cp_2 + D = 0$$

se réduit à

$$(42) \quad \frac{f_2^2}{n_2} p_0 - \frac{f_0^2}{n_0} p_2 + \frac{e_1}{n_1} f_0 f_2 = 0.$$

Posant

$$(43) \quad \begin{cases} p_0 = P_0 + b_0, \\ p_2 = P_2 + b_2, \end{cases}$$

on peut faire disparaître le terme constant de l'équation des foyers conjugués, par la condition •

$$(44) \quad \frac{f_2^2}{n_2} b_0 - \frac{f_0^2}{n_0} b_2 + \frac{e_1}{n_1} f_0 f_2 = 0,$$

c'est-à-dire en prenant pour origines deux points conjugués quelconques. On a alors

$$(45) \quad \begin{aligned} \frac{f_2^2}{n_2} P_0 - \frac{f_0^2}{n_0} P_2 &= 0, \\ \frac{P_2}{P_0} &= \frac{n_0 f_2^2}{n_2 f_0^2}; \end{aligned}$$

le rapport $\frac{P_2}{P_0}$ a une valeur finie et constante.

L'expression du grossissement

$$G_2 = \frac{f_0 p_2 - f_2 p_0}{f_2 p_0 - f_0 p_2}$$

devient, par la même substitution,

$$G_2 = \frac{\frac{P_2}{f_2} + \frac{b^2}{f_2} - 1}{\frac{P_0}{f_0} + \frac{b_0}{f_0} - 1}.$$

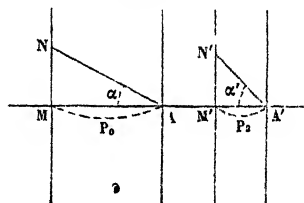
En remplaçant P_2 et b_2 dans cette expression en fonction de P_0 et b_0 , on arrive, toutes réductions faites, à l'expression très simple

$$(46) \quad G_2 = \frac{n_0 f_2}{n_2 f_0}.$$

Le grossissement est constant.

Il est aisé de voir qu'un tel système optique jouit de la propriété qu'un faisceau de rayons parallèles incidents donne un faisceau de rayons réfractés parallèles entre eux. En effet, pour $P_0 = \infty$, $P_2 = \infty$; mais l'angle α' , que les rayons réfractés forment avec l'axe, n'est pas égal à l'angle α des rayons incidents. Soient en effet (fig. 136) A et A' les deux plans conjugués par rapport auxquels nous comptons les distances P_0 et P_2 ; M et M' deux autres plans conjugués, et considérons un rayon incident NA et le rayon réfracté correspondant N' A'.

Fig. 136.



L'objet MN situé dans le plan M a pour image M' N' et l'on a

$$(47) \quad \begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\overline{MN}}{P_0}, & \tan \alpha' &= \frac{\overline{M'N'}}{P_2}, \\ \frac{\tan \alpha'}{\tan \alpha} &= \frac{P_0}{P_2} \frac{\overline{M'N'}}{\overline{MN}} = \frac{P_0}{P_2} G_2 = \frac{f_0}{f_2}. \end{aligned}$$

Le rapport $\frac{\tan \alpha'}{\tan \alpha}$, que l'on peut confondre avec $\frac{\alpha'}{\alpha}$ quand les angles sont suffisamment petits, peut être désigné sous le nom de *grossissement angulaire*. Ce grossissement est constant.

Il n'y a aucune difficulté à étendre ces résultats au cas d'un nombre quelconque de réfractions. Quand une des transformations successives que nous faisons subir à l'équation des foyers conjugués amènera une équation

$$APP' + BP + CP' + D = 0,$$

dans laquelle le coefficient A sera nul, l'équation des foyers conjugués pourra se ramener à la forme

$$(48) \quad BP_1 + CP'_1 = 0;$$

le grossissement linéaire et le grossissement angulaire auront des valeurs constantes qu'on obtiendra en effectuant dans les équations (46) et (47) les substitutions convenables. Une lunette, réglée pour une vue infiniment presbyte, fournit un exemple particulier de ces conditions.

Si la condition $A = 0$ se présente pour une transformation intermédiaire, on ramènera l'équation à la forme

$$BP_1 + CP'_1 = 0$$

et l'on éliminera P'_1 entre cette équation, et celle qui correspond à la réfraction suivante, en suivant la marche ordinaire. Les plans principaux seront déterminés sans ambiguë par la condition que le terme constant disparaisse de l'équation des foyers conjugués, et que le grossissement linéaire dans ces plans principaux soit égal à 1.

NOMBRE DES ÉLÉMENTS NÉCESSAIRES POUR DÉTERMINER LES EFFETS EXTÉRIEURS D'UN SYSTÈME OPTIQUE. — Dans tous les cas et quelles que soient les origines que l'on adopte pour compter les distances P et P' , l'équation des foyers conjugués est de la forme

$$(49) \quad APP' + BP + CP' + D = 0,$$

les rapports $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{D}{A}$ étant des constantes déterminées par les rayons de courbure, les distances des surfaces réfringentes et les indices des divers milieux. Pour déterminer ces rapports, il faut connaître trois systèmes de valeurs de P et de P' , c'est-à-dire trois couples de plans conjugués. Quand le système admet des plans focaux, à distance finie, chacun d'eux équivaut à un couple de plans conjugués, puisqu'il a son conjugué à l'infini (').

(') Quand les plans focaux sont à l'infini, ils n'équivalent plus qu'à une seule condition, puisqu'un seul paramètre s'annule: il suffit de donner le gros-

En ce qui concerne le grossissement, nous n'en avons trouvé l'expression que dans l'hypothèse où l'on prend pour origines les plans principaux. L'équation des foyers conjugués étant alors

$$(50) \quad \frac{f}{P} + \frac{f'}{P'} = 1,$$

on a

$$(51) \quad G = -\frac{P'f}{Pf'}.$$

Transportons les origines en deux points conjugués quelconques ayant pour coordonnées b et b' , et soient Q et Q' les coordonnées nouvelles; on a

$$(52) \quad Q = P - b, \quad Q' = P' - b',$$

et l'équation des foyers conjugués devient

$$(53) \quad \frac{f}{Q+b} + \frac{f'}{Q'+b'} = 1;$$

mais, b et b' étant conjugués, on a

$$(54) \quad \frac{f}{b} + \frac{f'}{b'} = 1,$$

et par suite l'équation (53) se réduit à

$$(55) \quad \frac{f-b}{Q} + \frac{f'-b'}{Q'} = 1.$$

Étant donnés trois couples de plans conjugués, on comptera les distances Q et Q' à partir de l'un deux, et l'on déterminera $f-b$, $f'-b'$ par deux équations du second degré; on pourra ensuite déterminer le conjugué d'un plan quelconque au moyen de l'équation (54).

L'expression (51) du grossissement devient, grâce à la même substitution,

$$(56) \quad G = -\frac{f(Q' + b')}{f'(Q + b)},$$

sissement et le rapport des distances de deux plans conjugués à deux autres conjugués donnés, en tout quatre conditions.

ou, en tenant compte des relations (53) et (54),

$$(57) \quad G = -\frac{b}{b'} \frac{f' - b' - Q'}{f - b}.$$

Cette expression contient un paramètre $\frac{b}{b'}$, qui n'est pas déterminé par les conditions précédentes. Il est donc nécessaire de donner le grossissement pour un couple de plans conjugués connus. Cette condition angulaire indispensable est donnée implicitement quand on désigne les plans principaux, pour lesquels, comme on sait, le grossissement est égal à 1.

Il y a donc en tout quatre conditions à fournir, dont au moins un grossissement, pour déterminer l'effet extérieur d'un système optique. Les plans principaux ou les points nodaux équivalent à deux conditions; mais les deux couples pris simultanément n'en représentent que trois, à cause de la relation particulière qui subsiste entre ces éléments.

Dans le cas vulgaire où les indices des milieux extrêmes sont identiques, on a $f = -f'$, et il suffit de connaître deux systèmes de plans conjugués et un grossissement.

DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DES CONSTANTES D'UN SYSTÈME OPTIQUE. — Étant donné un système optique que l'on ne veut pas démonter, on peut déterminer expérimentalement les constantes qui le caractérisent, c'est-à-dire la position des plans focaux et des plans principaux. Nous nous bornerons à considérer le cas où les milieux extrêmes sont identiques.

Quand le système est convergent, il n'y a aucune difficulté à déterminer directement les plans focaux. Quant aux plans principaux, on fixe leur situation à l'aide d'une formule que nous allons démontrer.

Soient PB un objet placé devant un système convergent, P'B' son image. Désignons par μ la distance FB de l'objet au plan focal le plus voisin, comptée positivement dans la direction KF, c'est-à-dire vers l'extérieur du système optique; par μ' la distance F'B' de l'image au deuxième plan focal comptée positivement en sens inverse de la précédente, c'est-à-dire aussi vers l'extérieur, on a, en désignant par ϕ la valeur ab-

solue de la distance focale,

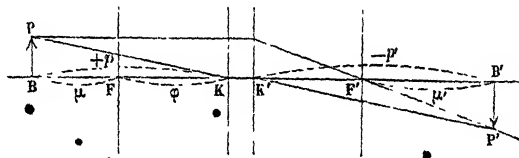
$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = -\frac{1}{\varphi}, \quad p = \mu + \varphi, \quad -p' = \mu' + \varphi.$$

Éliminant p et p' entre ces relations, on a

$$(58) \quad \mu\mu' = \varphi^2,$$

relation analogue à l'équation de Newton que nous avons démontrée pour les miroirs. On reconnaît aisément que, grâce

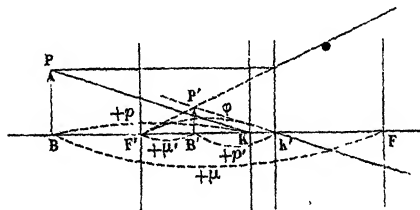
Fig. 137.



aux conventions faites sur les signes, cette formule est générale et s'applique aussi aux systèmes divergents (1). On me-

(1) Considérons un système divergent et soit toujours φ la valeur absolue

Fig. 138.



de la distance focale; on a

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{\varphi},$$

et l'on reconnaît sur la fig. 138 que l'on a

$$p = \mu - \varphi, \\ p' = \varphi - \mu';$$

d'où

$$\mu\mu' = \varphi^2.$$

surera les distances μ et μ' conformément aux conventions, et l'on en déduira φ , c'est-à-dire la distance des plans principaux aux plans focaux. Le système sera alors entièrement connu ⁽¹⁾.

Au lieu de chercher directement les plans focaux, on aurait pu mesurer un grossissement, et cette dernière méthode est très avantageuse dans certains cas, par exemple celui de la lunette astronomique, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus ⁽²⁾ [p. 128*].

Si l'on avait affaire à un système divergent A, il serait toujours possible de l'associer à une lentille convergente B connue, de manière à rendre le système convergent. On déterminerait les éléments de ce nouveau système, et par le calcul on en déduirait les éléments du système A.

INSTRUMENTS FORMÉS DE LENTILLES ÉPAISSES. — Les objectifs et les oculaires des lunettes, quelle que soit la complication de leur structure individuelle, forment des systèmes optiques, convergents ou divergents, et dont les deux faces plongent dans le même milieu. On peut les étudier séparément et déterminer leurs constantes, soit par le calcul, d'après la connaissance de leurs éléments, soit par l'expérience, comme on vient de l'indiquer ci-dessus.

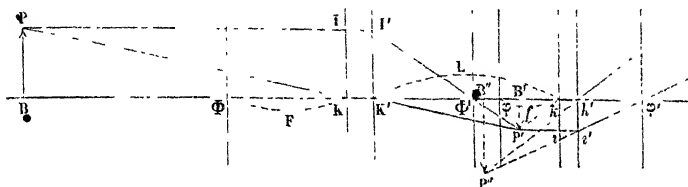
Quand on connaît les plans principaux et les plans focaux d'un objectif et d'un oculaire, on peut les associer pour former une lunette, et rien ne s'oppose à ce qu'on réalise la construction géométrique des images, en suivant la même marche qui a été adoptée dans la théorie élémentaire des instruments d'optique. Soient, par exemple, une lunette astronomique (fig. 139), K, K', Φ , Φ' les points principaux et les points focaux de l'objectif, k, k', φ , φ' les points principaux et les points

⁽¹⁾ Il est déterminé par quatre conditions, à savoir deux plans focaux et deux plans conjugués, c'est-à-dire trois couples conjugués et la relation $n = n'$ qui remplace la condition angulaire et permet de déterminer les plans principaux.

⁽²⁾ La méthode du focomètre, expliquée ci-dessus pour le cas des lentilles infiniment minces, est un cas particulier de la mesure d'un grossissement.

focaux de l'oculaire; PB l'objet linéaire dont on veut trouver l'image. Nous effectuerons deux fois la construction connue, en nous servant du rayon parallèle à l'axe et du rayon sans

Fig. 139.



déviation, comme le montre la figure, et nous trouvons ainsi l'image P'B'.

La formule qui donne la position de l'image, quand celle de l'objet est donnée, est la même que celle qui conviendrait à une lunette formée de lentilles infiniment minces, de mêmes distances focales que les systèmes épais formant l'objectif et l'oculaire, pourvu que les distances de l'objet et des images successives soient comptées, à partir des plans principaux correspondants. Ainsi la distance de l'objet à la lunette devient celle de l'objet au premier plan principal K de l'objectif; celle de l'image définitive à l'oculaire, la distance de cette image au second plan principal k' de l'oculaire. La longueur L de la lunette devient la distance du second plan principal K' de l'objectif au premier plan principal k de l'oculaire.

La distance de l'anneau oculaire au plan k' sera toujours

$$x = -\frac{L.f}{L-f},$$

et le grossissement, évalué pour le point oculaire,

$$G = \frac{L-f}{f}.$$

Il aura toujours pour mesure le rapport du diamètre de la partie utile de l'objectif au diamètre de l'anneau oculaire. En un mot, tous les calculs élémentaires réalisés précédemment

conservent leur valeur pratique. Il serait donc superflu d'y revenir ici plus longuement (1).

(1) La question des propriétés optiques de l'œil, envisagées au point de vue purement géométrique, trouvera sa place au Chapitre de la vision, dans le 3^e fascicule de l'*Optique*.

TABLE DES MATIÈRES

DU DEUXIÈME. FASCICULE DU TOME TROISIÈME.

OPTIQUE.

	Pages
INTRODUCTION.....	1*
Corps lumineux, corps transparents et corps opaques.....	1*
Propagation rectiligne de la lumière. — Ondes et rayons... ..	2*
Division de l'Optique.....	4*

OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE.

CHAPITRE I.

Instruments généraux de l'Optique.

Porte-lumière.....	6*
Héliostat.....	8*
Conditions théoriques.....	8*
Héliostat de Foucault.....	11*
Héliostat de Silbermann.....	12*
Régulateurs électriques.....	13*
Lumière Drummond.....	15*
Banc d'optique.....	17*
Cercles divisés.....	18*

	Pages
Méthode générale de projection.....	114*
Phares.....	116*
II. Combinaisons oculaires. — Loupe.....	118*
2° <i>Instruments composés</i>	123*
Diaphragme. — Champ.....	124*
Réticule.....	124*
Tirage.....	126*
Anneau oculaire.....	126*
Grossissement.....	126*
Clarté.....	128*
Lunette astronomique.....	130*
Lunette terrestre.....	132*
Lunette de Galilée.....	133*
<i>Telescopes</i>	135*
Télescope de Newton.....	135*
Télescope de Grégory et de Cassegrain.....	136*
Télescope de Foucault.....	137*
<i>Microscope</i>	139*
Conditions physiques.....	139*
Conditions mécaniques.....	141*
Grossissement.....	144*
Microscope binoculaire.....	145*
<i>Achromatisme</i>	147*
Pouvoir dispersif.....	148*
Achromatisme des lentilles.....	150*
Achromatisme des prismes.....	153*
Diasporamètre.....	154*
Oculaire d'Huygens.....	157*
Oculaire positif.....	158*

CHAPITRE VI.

Lentilles épaisses. — Systèmes optiques.

Réfraction par un système de surfaces sphériques centrées.....	161*
I. <i>Systèmes sans épaisseur</i>	165*
Cas où les milieux extrêmes sont identiques.....	166*
Cas où les milieux extrêmes sont différents.....	167*
Cas où A_m est nul.....	169*
II. <i>Systèmes épais</i>	169*
Cas de deux réfractions.....	169*
Points principaux.....	172*

TABLE DES MATIÈRES.

199*

Pages

Construction géométrique des images au moyen des plans principaux et des plans focaux.....	174*
Poids nodaux.....	176*
Grossissement.....	177*
Cas d'un nombre quelconque de réfractions.....	178*
Cas où les milieux extrêmes sont identiques.....	181*
Lentilles épaisses dont les deux faces plongent dans un même milieu. — Centre optique.....	182*
Cas où les foyers sont à l'infini.....	185*
Nombre des éléments nécessaires pour déterminer l'effet extérieur d'un système optique.....	188*
Détermination expérimentale des éléments d'un système optique.....	190*
Instruments formés de lentilles épaisses.....	192*

PLANCHES I, II, III.